Studio 3b: System av differentialekvationer, numeriska metoder

Analys och Linjär Algebra, del C, K1/Kf1/Bt1, vt09

7 februari 2009

1 Eulers metod

I denna laboration betraktar vi linjära differentialekvationer för vektorvärda funktioner, $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}$. Vi vet hur dessa kan lösas analytiskt. Vi ska nu undersöka några numeriska metoder för att lösa system av differentialekvationer och jämföra dessa med de analytiska lösningarna. Observera att de analytiska lösningarna enbart fungerar för linjära system, medan de numeriska lösningarna fungerar generellt.

Ett allmänt system av differentialekvationer med begynnelsevillkor ges av

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t)), \qquad a \le t \le b \\ &\boldsymbol{u}(a) = \boldsymbol{u}_a. \end{aligned}$$

Antag att vi diskretiserar ett intervall $[a, b]$ i punkterna $a = t_0, t_1, t_2, \ldots t_n = b$, så att alla steg är lika långa, det vill säga $t_{i+1} - t_i = h$. Eulers framåtdiskretisering av derivatan $g'(t)$ i punkten t_i ges då av

$$g'(t_i) \approx \frac{g(t_{i+1}) - g(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \frac{g(t_{i+1}) - g(t_i)}{h}.$$

Vi låter nu $\boldsymbol{U}(t_i)$ beteckna den numeriska lösning som ska approximera $\boldsymbol{u}(t)$. Med Eulers framåtdiskretisering skrivs systemet ovan om till

$$\frac{\boldsymbol{U}(t_{i+1}) - \boldsymbol{U}(t_i)}{h} = \boldsymbol{f}(t_i, \boldsymbol{U}(t_i)), \qquad 0 \le i \le n-1,$$

vilket ger iterationen

$$\boldsymbol{U}(t_{i+1}) = \boldsymbol{U}(t_i) + h\boldsymbol{f}(t_i, \boldsymbol{U}(t_i))$$

med startvärde $\boldsymbol{U}(t_0) = \boldsymbol{u}_a$.

1.1 Uppgifter

Betrakta egenvärdesproblemet $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ för matrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Bestäm egenvärdena och tillhörande egenvektorer till A. Gör beräkningarna både analytiskt (för hand) och med Matlabkommandot `[V, D] = eig(A)`.

2. Lös begynnelsevärdesproblemet $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t), t > 0, \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ analytiskt med egenvärdesmetoden.

3. Rita fasporträttet för systemet, det vill säga kurvan $(x_1(t), x_2(t))$ i x_1x_2-planet. Rita i en annan graf x_1 och x_2 som funktion av tiden.

4. Skriv ett program `Euler.m` som tar matrisen A, intervallgränser, initialvärde och steglängd som argument och sedan returnerar en vektor med tidpunkterna t_i och en $2 \times n$-matris med kolonnvektorer $\boldsymbol{x}(t_i)$ enligt Eulers framåtmetod. Den som behöver hjälp kan titta i filen `mytrig.m` (på kurshemsidan). Lös sedan systemet

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \qquad 0 \le t \le 2\pi, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Använd ett ganska stort steg, t ex $h = 0.1$. Plotta sedan fasporträttet av denna lösning i samma graf som det tidigare fasporträttet och x_1 och x_2 som funktion av t i samma graf som dessa redan finns i. Jämför kurvorna från den analytiska lösningen med den numeriska lösningen.

2 Mittpunktsmetoden

Mittpunktsmetoden ges av

$$\boldsymbol{U}(t_i) = \boldsymbol{U}(t_{i-1}) + h\boldsymbol{f}\left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}, \frac{\boldsymbol{U}(t_{i-1}) + \boldsymbol{U}(t_i)}{2}\right).$$

Observera att detta är en fixpunktsekvation för $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}(t_i)$ på formen $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{V})$:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}(t_{i-1}) + h\boldsymbol{f}\left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}, \frac{\boldsymbol{U}(t_{i-1}) + \boldsymbol{V}}{2}\right).$$

Denna ekvation kan visas ha entydig lösning om $h < 2/L_f$, där L_f är Lipschizkonstanten för f.

2.1 Uppgifter

1. Implementera fixpunktsiterationen

$$\boldsymbol{V}_k = \boldsymbol{U}(t_{i-1}) + h\boldsymbol{f}\left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}, \frac{\boldsymbol{U}(t_{i-1}) + \boldsymbol{V}_{k-1}}{2}\right).$$

   i ett program `mittpunkt_ode.m`. Använd toleransen $tol = h^3$ för iterationerna. Om du behöver hjälp, se `my_ode.m` (länk på kurshemsidan).

2. Lös systemet från avsnitt 1 med mittpunktsmetoden. Hur väl stämmer kurvorna du får i detta fall med den korrekta lösningen?

3 En andra ordningens ODE

Betrakta nu följande andra ordningens ODE.

$$y''(t) - y(t) = 0, \quad t > 0$$
$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

3.1 Uppgifter

1. Skriv om problemet som ett system av första ordningens ekvationer. Det kan göras genom att sätta $x_1(t) = y'(t)$ och $x_2(t) = y(t)$ och sedan beräkna derivatan av $(x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$.

2. Lös problemet för hand med egenvärdesmetoden och rita fasporträttet.

3. Använd Eulers metod eller mittpunktsmetoden för att lösa systemet och plotta fasporträttet.

4. Genom att skriva en programsekvens som nedan, kan Du plotta fasporträttet för startvärden, som löper över looparna i och j och se hur porträttet växer fram.

```
clear
axis([-5 5 -5 5])
hold on
for i=-3:.5:3
   for j=-3:.5:3
      [t, W] = mytrig([0 1; 1 0], [0 2], [i;j], .1)
      plot(W(1,:), W(2,:))
      pause(0.1)
   end
end
```