Studio 5b: Optimering.

Analys och Linjär Algebra, del C, K1/Kf1/Bt1, vt09

16 februari 2009

Vi studerar problemet att bestämma maximi- och minimipunkter samt sadelpunkter till en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Undersökningarna innehåller både analytiska och numeriska moment.

En stationär punkt till $f(x, y)$ är en punkt (a, b) för vilken gradientvektorn $\nabla f(a, b) = 0$. En sådan punkt kan vara en lokal maximi- eller minimipunkt eller en sadelpunkt till f. Bestämningen av vilken typ av punkt det är kan ske med hjälp av egenvärdena till Hessianmatrisen. Här skall vi även ta hjälp av funktionens graf och dess nivåkurvor. Vi kommer också att bestämma några minimipunkter med den nedan beskrivna Steepest descentmetoden och med en av Matlabs inbyggda optimeringsrutiner.

Steepest descentmetoden

En numerisk metod för flerdimensionell optimering är Steepest descentmetoden. Metoden bygger på det faktum att en funktion minskar snabbast i negativa gradientens riktning. Metoden söker efter ett lokalt minimum utgående från en startpunkt (x_0, y_0) genom att gå ett stycke i riktningen $-\nabla f(x_0, y_0)$. Det första iterationssteget blir alltså $(x_1, y_1) = (x_0, y_0) - \alpha \nabla f(x_0, y_0)$. Här är α en konstant som avgör hur långt vi går i riktningen $-\nabla f(x_0, y_0)$.

Vill man istället ha ett maximum går man antingen i positiv gradientriktning (steepest ascent) eller tillämpar steepest descent på $-f(x, y)$.

Metoden ges av

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k) - \alpha \nabla f(x_k, y_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Konstanten α är en s.k. linjesökningsparameter. Ett bästa val av α är sådant att $f((x_k, y_k) - \alpha \nabla f(x_k, y_k))$ minimeras, vilket leder till ett endimensionellt optimeringsproblem. Man kan också välja ett α så att $f((x_k, y_k) - \alpha \nabla f(x_k, y_k)) < f(x_k, y_k)$, vilket garanterar en minskning av funktionsvärdet.

På hemsidan finns filerna `SD.m` och `Jacobi.m`. I filen `SD.m` utförs beräkningar enligt Steepest descentmetoden och i `Jacobi.m` beräknas en approximation till gradientvektorn.

Optimeringsprogram i Matlab

I Optimization Toolbox i Matlab finns bl a `fminbnd` för minimering i en variabel. För flervariabelproblem finns `fminunc` och `fminsearch`. Den senare används då funktionen inte är deriverbar.

Ett anrop av `fminunc` kan se ut så här:

```
>>  x = fminunc(@(x)x(1)^2+x(2)^2,[1;1])
```

vilket minimerar funktionen $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ från punkten $(1, 1)$, eller

```
>>  x0 =  ginput(1)
>>  x=fminunc(@funk,x0')
```

som minimerar funktionen `funk` från en punkt som ges av ett klick från musen. Här är `funk.m` en matlabfunktion, till exempel

```
>>   function f=funk(x)
>>   f = x(1)^2+x(2)^2;
```

Uppgifter

Betrakta följande funktioner.

(a) $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 - 6xy(x - y - 1)$

(b) $f(x, y) = x^2 y e^{-(x^2+y^2)}$

Genomför nu dessa beräkningar för funktionerna ovan.

(1) Plotta funktionen och lämpliga nivåkurvor, så att eventuella lokala maximi-, minimi- och sadelpunkter blir synliga.

(2) Beräkna en lokal minimipunkt med hjälp av filerna SD.m och Jacobi.m. Klicka in ett startvärde till SD.m från grafen med Matlab kommandot `ginput`. Prova olika startvärden.

(3) Beräkna en lokal minimipunkt med Matlabs optimeringsfunktion `fminunc`.

Uppgift för redovisning

Vi gör här en utförligare undersökning av funktionen från Studio 1a,

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + y^2 - 15y.$$

(a) Bestäm alla stationära punkter till f och klassificera punkterna som maximi-, minimi- eller sadelpunkt med hjälp av Hessianmatrisen. Bestäm gradientvektorn och Hessianmatrisen för hand. Gör de återstående beräkningarna med Matlab.

(b) Plotta funktionen och gör en konturplot, som är så pass detaljerad att du ser var eventuella lokala maximi-, minimi- och sadelpunkter finns. Jämför med vad du kom fram till i uppgift (a).

(c) Funktionen har en minimipunkt. Bestäm denna med SD.m. Klicka in en startpunkt till SD.m med Matlabs kommando `ginput` .

(d) Bestäm minimipunkten med `fminunc`. Jämför med resultatet i (c).

(e) Beskriv med penna och papper hur Steepest descentmetoden fungerar. Använd Dig av gradientvektorer och nivåkurvor. Hur sker beräkningarna ut i SD.m? Hur beräknas gradientvektorn i Jacobi.m?