Studio 6: Dubbelintegral.

Analys och Linjär Algebra, del C, K1/Kf1/Bt1, vt09

20 februari 2009

1 Repetition av enkelintegral

I ALA B skrev du en MATLAB-funktion `minintegral` som beräknar integralen av en given funktion med en av tre valbara kvadraturregler. Funktionsfilen för att beräkna integralen med trapetsregeln kan till exempel se ut som följer.

```
function Q = minintegral(func, I, n)

a = I(1);
b = I(2);
h = (b-a)/n;
x = a:h:b;

% Använd nedanstående om funktionen func inte accepterar
% vektorer som indata eller om vi vill se integralvärdena
% längs vägen.

Q = 0;
f(1) = func(a);
for i = 1:n                     % loop över samtliga delintervall
  f(i+1) = func(x(i+1));                      % funktionsvärden
  u(i+1) = u(i) + (f(i) + f(i+1))*h/2;        % trapetsregeln
end
Q = u(n+1);

% Annars kan du skriva så här

f = func(x);
Q = (2*sum(f) - f(1) - f(n+1))*h/2;
```

Observera att den sista summan följer av att funktionsvärdena summeras för varje intervall som angränsar till motsvarande x-värde, så alla funktionsvärden summeras två gånger utom de yttersta. Fördelen med den senare varianten är att vi slipper for-loopen, som är rätt så långsam.

2 Dubbelintegral

Vi skall nu utvidga ovanstående till beräkning av dubbelintegral över en rektangel $Q = [a,b] \times [c,d] = \{x = (x,y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$, och utgår från approximationen

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&\approx f(a+h,c+h)\,h^2 + f(a+2h,c+h)\,h^2 + \ldots + f(b,c+h)\,h^2 \\
&+ f(a+h,c+2h)\,h^2 + f(a+2h,c+2h)\,h^2 + \ldots + f(b,c+2h)\,h^2 \\
&\qquad\qquad\vdots \\
&+ f(a+h,d)\,h^2 + f(a+2h,d)\,h^2 + \ldots + f(b,d)\,h^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(a+ih,c+jh)\,h^2,
\end{aligned}$$

där vi nu använder kvadratur baserad på integrandens värde i det övre, högra hörnet av delkvadraterna $Q_{ij} = [a+(i-1)h, a+ih] \times [c+(j-1)h, c+jh]$, $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,m$. Denna kvadratur kan sedan lätt förbättras till exempelvis mittpunktsregeln eller trapetsregeln. Notera att $f(a+ih,c+jh)\,h^2$ är *volymen* av ett rätblock med basarean h^2 och höjden $f(a+ih,c+jh)$, så att dubbelsumman är en approximation till volymen under ytan $z = f(x,y)$, $(x,y) \in Q$.

2.1 Uppgifter

1. Skriv en funktionsfil `function q = my_quad2D(f, a, b, c, d, h)` som approximerar dubbelintegralen av $f = f(x,y)$ över rektangeln $Q = [a,b] \times [c,d]$ genom att beräkna dubbelsumman ovan.

   Utgå gärna från `minintegral` som du skrev i ALA B. Uppgiften kan lösas på flera olika sätt. Ett är att göra om den enkla for-loopen till en dubbel for-loop, som för varje värde på $x(i)$ löper igenom en for-loop i y-led. Exempel på sådana fås om man skriver `>>help for`. Ett annat är att anta att $f(x,y)$ kan ta vektorer som indata och använda vektorsummering. Ett tredje är att för varje värde på $x(i)$ anropa `minintegral`. Tänk då på att funktionshandtaget då måste gå till den funktion i en variabel y som ges av $f(x(i),y)$.

2. Implementera mittpunktsregeln eller trapetsregeln.

3. Beräkna med `my_quad2D` integralen av $f(x,y)$ på $[0,1] \times [0,1]$ för

   (a) $f(x,y) = xy + y^2$

   (b) $f(x,y) = 2 + \sin(100(x+y))$

   (c) $f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

(d) $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$. Denna integral är *inte* lätt att räkna ut analytiskt.

Beräkna i de två första fallen även det exakta analytiska värdet av integralen. *Det är viktigt att på detta sätt alltid testköra dina program på exempel där du känner den exakta lösningen.*

4. Välj en av de integraler du räknat ut analytiskt ovan och beräkna den med olika värden på h, till exempel $h = 0.1, 0.01, 0.001$ och med olika kvadratur. Hur beror felet (skillnaden mellan det exakta och det beräknade värdet) på h? Jämför gärna med motsvarande jämförelser i ALA-B för enkelintegraler.

5. Läs Exempel 4 sid 775 (A very important integral) i Adams. Där beskrivs hur man kan beräkna integralen av e^{-x^2} från $-\infty$ till ∞ genom att beräkna detta värde i kvadrat som dubbelintegralen av $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ över hela (x, y)-planet, vilket genom övergång till polära koordinater blir π.

   Du kan nu numeriskt testa det senare påståendet, det vill säga att $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ över första kvadranten blir π. Välj ett riktigt stort område, $[-100{,}100] \times [-100{,}100]$ eller större, och beräkna integralen på detta område. Om det hela fungerar skall Du få ett närmevärde på π.

3 Dubbelintegral över ett mer generellt område

De program du skrivit ovan för att beräkna dubbelintegraler är begränsat till rektangulära områden. För att numeriskt beräkna dubbelintegraler över mer generella områden måste vi använda något hjälpmedel för att definiera området och sedan dela in det i små bitar. Dessa små delområden behöver förstås inte vara rektanglar, ofta används trianglar istället eftersom det är lättare att anpassa ett triangelnät till en krökt rand.

Ett sådant verktyg kan du starta genom att skriva

```
>> pdetool
```

Matlab startar nu ett nytt fönster med PDE Toolbox. Uppe till vänster under menyerna finns fem knappar med olika ritverktyg, två för rätblock, två för ellipser och en för ett godtyckligt polygonområde.

Som exempel kan du prova att rita området $\Omega = [-1, 1] \times [-0.8, 0.8]$. Klicka på rektangelikonen längst uppe till vänster (under File), placera musmarkören över $[-1; -0.8]$, samt klicka och dra med vänster musknapp. Släpp när markören står över $[1; 0.8]$. För att underlätta ritningen kan du markera Grid och Snap i menyn Options. Detta lägger ut en grid, samt linjerar upp objekten du ritar med griden. Du kan nu dela in området i småtrianglar genom att klicka på ikonen med en triangel på (under Mesh).

För att kunna använda oss av trianguleringen exporterar vårt nät till Matlabs workspace genom att välja Export Mesh... från menyn Mesh. Klicka på OK. Skriv

```
>> whos
```

vid Matlab-prompten så listas alla variabler som finns definierade och deras storlek (både matrisstorlek och hur mycket datorminne de upptar). Om du har lyckats bör det finnas tre matriser `p`, `e` och `t` som definierar nätet. Vi kommer att använda oss av `p` och `t`:

- `p` innehåller alla nodpunkters (trianglarnas hörn) koordinater på så sätt att första kolumnen består av första nodens `x` och `y` positioner, andra kolumnen består av andra nodens `x` och `y`, osv. Hur många noder består ditt nät av?
- `t` innehåller en kolumn för varje triangel i nätet och i den kolumnen finns nodnummer för de tre noder som ligger i triangelns hörn. (Det finns också en fjärde rad i `t` som vi inte behöver använda nu.) Hur många trianglar består ditt nät av?

Numreringen av trianglar och noder kan man se i toolboxen genom att markera Show Triangel Labels respektive Show Node Labels under menyfliken Mesh.

För att räkna ut integralen över området Ω kan vi nu löpa igenom alla trianglar, beräkna funktionens värde i t.ex. triangelns mittpunkt, multiplicera med triangelns area och summera alla dessa värden. Triangelns mittpunkt och area kan vi räkna ut genom att vi tittar i rätt kolumn i `t`, plockar ut nodnumren för hörnpunkterna och går in i dessa kolumner i `p` för att få koordinatvärden för hörnpunkter.

3.1 Uppgifter

Använd den färdiga filen `my_quad2genf.m`, som räknar ut integralen över ett godtyckligt område beskrivet av `p` och `t` eller, om Du vill skriva programmet själv, utgå från mallen `my_quad2Dgen.m`.

Testa Ditt program på följande exempel.

1. $\int_0^1 \int_0^x (xy + y^2)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$
2. $\int_0^\pi \int_{-x}^x \cos y\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$
3. $\int\int_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}A$
4. $\int\int_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}\, \mathrm{d}A$

Ett alternativt sätt att beräkna integralen över ett mer generellt område är att sätta funktionen till noll utanför det aktuella området och beräkna integralen över ett rektangulärt område, som innesluter det givna området. I dokumentationen för Matlabs funktion `dblquad` finns följande förslag till att beräkna den fjärde integralen ovan:

```
dblquad(@(x,y) sqrt(1-(x.^2+y.^2)).*(x.^2+y.^2<=1), -1, 1, -1, 1)
```

Här har uttrycket `x.^2+y.^2<=1` värdet 1 då (x,y) tillhör mängden $x^2+y^2 \leq 1$ och annars värdet 0. Försök använda även denna metod på något exempel ovan.

Alternativt kan man beräkna integralen med

```
dblquad(@(x,y) sqrt(max(1-(x.^2+t.^2),0)), -1, 1, -1, 1)
```