Studio 7: Vektorfält

Analys och Linjär Algebra, del C, K1/Kf1/Bt1, vt09

27 februari 2009

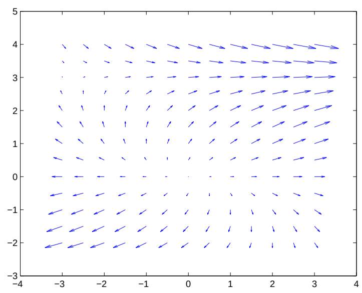
1 Fältlinjer

Ett vektorfält är som bekant en funktion $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Vi ska här betrakta vektorfält i planet och rummet, det vill säga vektorfält på formen $\boldsymbol{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x,y))$ och $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$.

Som vi såg i laboration 2a kan vektorfält ritas i matlab med hjälp av funktionen **quiver**. Som exempel kan nämnas att raderna

```
x=-3:.5:3;
y=-2:.5:4;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
quiver(X,Y,X+Y,2*sin(Y))
```

ger figuren



Figur 1: Pilarnas riktning visar fältets riktning.

Om släpper en partikel fri att följa fältet kommer dess väg att beskrivas av **fältlinjer**. De har egenskapen att i varje punkt är fältet en tangent till fältlinjen som passerar denna punkt. Partikeln färdas alltså längs fältlinjen i den riktning som ges av fältet.

Analytiskt kan man beräkna fältlinjer genom att lösa ut x, y och z ur ekvationerna

$$\frac{\mathrm{d}x}{F_1} = \frac{\mathrm{d}y}{F_2} = \frac{\mathrm{d}z}{F_3}.$$

Numeriskt gör man enklast som följer. Eftersom fältlinjen i varje punkt har fältet som tangent kan man stega sig fram längs fältlinjen genom att från punkten (x, y, z) röra sig steget $\alpha\boldsymbol{F}(x, y, z)$. Genom att välja α nära noll blir felet litet. Sedan upprepar vi proceduren från den punkt vi kommit till. Rekursionen blir således

$$(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}) = (x_i, y_i, z_i) + \alpha\boldsymbol{F}(x_i, y_i, z_i).$$

Uppgifter

Rita följande vektorfält på området $[-3, 3] \times [-3, 3]$ med quiver och beräkna sedan några fältlinjer för olika startpunkter. Snyggast blir det om ni skriver ett program som låter användaren ange startpunkt med musen och sedan ritar motsvarande fältlinje.

1. $\boldsymbol{F}(x, y) = (-y, x)$.
2. $\boldsymbol{F}(x, y) = (2y^2, y - 3x)$.
3. $\boldsymbol{F}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

2 Gradienten

Nedan ges ett skript som ger exempel på visualisering av gradienten (med hjälp av quiver) och ytan (med nivåkurvor) till funktionsytan

$$z = f(x,y) = x\, e^{-x^2-y^2}.$$

```
>> [X,Y] = meshgrid(-2:.2:2);
>> Z = X.*exp(-X.\^2 - Y.\^2);
>> [DX,DY] = gradient(Z,.2,.2);
>> contour(X,Y,Z)
>> hold on
>> quiver(X,Y,DX,DY)
>> colormap hsv
>> hold off
```

Funktionen **gradient** beräknar gradienten numeriskt. Du kan naturligtvis användan Din egen Jacobi.m här.

Skriptet nedan plottar ytan med ytnormaler till ytan

$$S : S(x,y) = (x, y, x\, e^{-x^2-y^2}),\ \ (x,y) \in \Omega = [-2,2] \times [-1,1].$$

```
>> [X,Y] = meshgrid(-2:0.25:2,-1:0.2:1);
>> Z = X.* exp(-X.\^2 - Y.\^2);
>> [U,V,W] = surfnorm(X,Y,Z);
>> quiver3(X,Y,Z,U,V,W,0.5);
>> hold on
>> surf(X,Y,Z);
>> colormap hsv
>> view(-35,45)
>> axis ([-2 2 -1 1 -.6 .6])
>> hold off
```

Uppgifter

Testa skripten ovan. Kombinera dem även med ditt fältlinjesprogram så att du kan rita ut fältlinjerna för dessa gradienter. Vad anger fältlinjerna för kurva i detta fall?

Rita sedan ut nivåkurvor (nivåytor), gradienter och fältlinjer till dessa funktioner.

1. Paraboloiden $f(x,y) = x^2 + y^2$.
2. Konen $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. Sadeln $f(x,y) = x^2 - y^2$.
4. Sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (nivåyta till $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$).

3 Linjeintegraler, arbete

Det arbete som ett fält utför på en partikel som färdas längs en kurva γ ges av

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Om fältet är konservativt, det vill säga om

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0,$$

så gäller $\boldsymbol{F} = \nabla\Phi$ för en skalärvärd funktion Φ och vi får

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{t=\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{F}(x(t), y(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \Phi(\boldsymbol{b}) - \Phi(\boldsymbol{a}).$$

För slutna kurvor gäller då att arbetet som ett konservativt fält utför på en partikel som färdas längs kurvan är noll, eftersom startpunkt och slutpunkt sammanfaller.

Vektorn

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

kallas rotationen av $\boldsymbol{F}$. För tvådimensionella fält får vi

$$\nabla \times (F_1, F_2, 0) = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

Det följer att ett sådant fält är konservativt om och endast om rotationen är noll.

Uppgifter

Rita upp fälten i avsnitt 1 tillsammans med en enhetscirkel kring valfri punkt (a, b). Vilka fält saknar rotation? Förklara med egna ord varför dessa inte utför något arbete på en partikel som färdas ett varv längs cirkeln.