Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Niklas Eriksen

Tentamen i tmv036C, Analys och linjär algebra C för K, Kf och Bt
lösningar
2009-03-14

---

1. Diagonalisera matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
ortogonalt.

Lösning: Egenvärdena beräknas genom
$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)^2 - 4 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 6). \end{aligned}$$

Egenvärdena är således 2 och 6. Ekvationerna $(A - \lambda I)\boldsymbol{v} = 0$ för dessa värden löses av $\boldsymbol{v}_1 = (1, -1)^{\mathrm{T}}$ och $\boldsymbol{v}_2 = (1, 1)^{\mathrm{T}}$. Dessa är ortogonala, och normeras genom att delas med $\sqrt{2}$. Alltså gäller
$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Låt
$$U = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestäm en ortogonal bas för U och projicera sedan $\boldsymbol{x} = (9, 1, -7)^{\mathrm{T}}$ på planet U.

Lösning: Vektorerna $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$ är linjärt oberoende, men inte ortogonala. Vi använder Gram-Schmidt för att få en ortogonal bas. Vi sätter

$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1$ och

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} - \frac{12-7}{2^2+1}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Vid projektionen gäller att vi ska projicera på var och en av basvektorerna, det vill säga

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_U \boldsymbol{x} &= \mathrm{proj}_{\boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{x} + \mathrm{proj}_{\boldsymbol{v}_2} \boldsymbol{x} \\
&= \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 + \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|^2}\boldsymbol{v}_2 \\
&= \frac{2-7}{2^2+1}(0,2,1)^{\mathrm{T}} + \frac{45+4+56}{25+16+64}(5,4,-8)^{\mathrm{T}} \\
&= -(0,2,1)^{\mathrm{T}} + (5,4,-8)^{\mathrm{T}} = (5,2,-9)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

Vi kan verifiera att lösningen är en projektion genom att kontrollera att $\boldsymbol{x} - \mathrm{proj}_U \boldsymbol{x} = (4,-1,2)$ är vinkelrät mot $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$.

3. Beräkna gradienten till funktionen $f(x,y) = \sin\left(\frac{x^2}{y}\right)$. Bestäm också en normal till funktionsytan i punkten $(x,y,z) = (\sqrt{\pi},1,0)$ samt en normal (i planet) till nivåkurvan till $f(x,y)$ i punkten $(x,y) = (\sqrt{\pi},1)$.

   Lösning: Gradienten ges av

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{2x\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)}{y}, \frac{-x^2\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)}{y^2}\right).$$

   En formel för normalen till funktionsytan är

$$\boldsymbol{n} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

   vilket i detta fall i punkten $(\sqrt{\pi},1,0)$ ger

$$\boldsymbol{n} = \left(-\frac{2\sqrt{\pi}\cos\pi}{1}, \frac{\pi\cos\pi}{1^2}, 1\right) = \left(2\sqrt{\pi}, -\pi, 1\right).$$

   Normalen till nivåkurvan ges av gradienten, som i denna punkt är

$$\nabla f(\sqrt{\pi},1) = (-2\sqrt{\pi},\pi).$$

4. Bestäm det största och minsta värdet av $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ på kvadraten $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$.

Lösning: I det inre av kvadraten måste ett eventuellt extremvärde antas i punkter där $\nabla f = \mathbf{0}$. Vi får $\mathbf{0} = \nabla f = (3x^2 - 3y, -3x + 3y^2)$, vilket ger $x^2 = y$ och $x = y^2 = x^4$. Alltså gäller $0 = x^4 - x = x(x^3 - 1)$ med reella nollställen $x = 0$ och $x = 1$. Dessa ger i turordning $y = 0^2 = 0$ och $y = 1^2 = 1$, så vi får en kritisk punkt i det inte av kvadraten, nämligen $(1,1)$.

Av symmetriskäl gäller att $f(t,0) = f(0,t)$ och $f(t,2) = f(2,t)$, så vi behöver bara kolla två av randstyckena. För den första av dessa har vi $g_1(t) = f(t,0) = t^3$, som saknar maxvärden i sitt inre. För den andra har vi $g_2(t) = f(t,2) = t^3 - 6t + 8$. Derivatan ger $g_2'(t) = 3t^2 - 6 = 0$ som ger $t = \sqrt{2}$.

Alltså är $(\sqrt{2}, 2)$ och $(2, \sqrt{2})$ punkter som är värda att undersökas.

Kritiska punkter är således $(1,1)$, $(\sqrt{2}, 2)$ och $(2, \sqrt{2})$ samt hörnen. Beräknas värdet i dessa punkter får vi $f(1,1) = -1$, $f(\sqrt{2}, 2) = f(2, \sqrt{2}) = 8 - 2\sqrt{2}$, $f(0,0) = 0$, $f(0,2) = f(2,0) = 8$ samt $f(2,2) = 4$. Störst är alltså 8 och minst -1.

5. Beräkna

$$\int_{y=0}^{4} \int_{x=\sqrt{y}}^{2} y\cos(x^5)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Lösning: Integralen löses genom att byta integrationsordning. Området begränsas (rita figur) av kurvorna $x = \sqrt{y}$, $x = 2$ och $y = 0$. Vi skriver om $x \geq \sqrt{y}$ till $y \leq x^2$ och kan sedan lösa integralen som följer.

$$\begin{aligned}
\int_{y=0}^{4} \int_{x=\sqrt{y}}^{2} y\cos(x^5)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{x^2} y\cos(x^5)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{2} \left[\frac{y^2}{2}\cos(x^5)\right]_0^{x^2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{x=0}^{2} x^4\cos(x^5)\,\mathrm{d}x \\
&= \left\{\ u = x^5, \mathrm{d}u = 5x^4\,\mathrm{d}x\ \right\} \\
&= \frac{1}{10}\int_{x=0}^{32} \cos(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{10}\left[\sin(u)\right]_0^{32} = \frac{\sin(32)}{10}.
\end{aligned}$$

6. Kroppen K ges av $x^2+y^2+z^2 \leq 1, x \leq 0, z \geq 0$. Beräkna

$$\iiint_{\mathrm{K}} x \,\mathrm{d}V.$$

Lösning: Vi går över till sfäriska koordinater. I detta fall har vi $0 \leq \rho \leq 1$, $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$ och $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Vi får

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathrm{K}} x \,\mathrm{d}V &= \int_{\rho=0}^{1} \int_{\theta=\pi/2}^{3\pi/2} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \rho\cos(\theta)\sin(\varphi)\rho^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \\
&= \int_{\rho=0}^{1} \rho^3\,\mathrm{d}\rho \int_{\theta=\pi/2}^{3\pi/2} \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{1-\cos(2\varphi)}{2}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 [\sin(\theta)]_{\pi/2}^{3\pi/2} \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{4}(-1-1)\left(\frac{\pi}{4}+0-0-0\right) = \frac{-\pi}{8}.
\end{aligned}$$

7. Beräkna arean av den del av sfären $x^2+y^2+z^2=4$ som ligger inuti cylindern $x^2+y^2=1$ och ovanför xy-planet, det vill säga $z>0$.

   Lösning: Arean ges av

$$A = \iint_{\mathrm{D}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}A,$$

där D ges av $x^2+y^2 \leq 1$ (cylindern) och $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ (sfären). Vi får

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

och

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},$$

vilket ger

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{(4-x^2-y^2)+x^2+y^2}{4-x^2-y^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

Arean blir således

$$
\begin{aligned}
A = \iint_D \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}A &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \frac{2r}{4-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&\{t = 4-r^2,\ \mathrm{d}t = -2r\,\mathrm{d}r\} \\
&= -4\pi \int_{t=4}^{3} \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\
&= -4\pi \left[\sqrt{t}\right]_4^3 \\
&= -4\pi(\sqrt{3}-2) = 4(2-\sqrt{3})\pi.
\end{aligned}
$$

8. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma (x+y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y,$$

längs $y^2 = x^3$ från $(0,0)$ till $(1,1)$.

Lösning: Denna uppgift kan lösas på flera sätt. Om vi parametriserar med $x = t$ och $y = t^{3/2}$ får vi $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ och $\mathrm{d}y = 3\sqrt{t}/2\,\mathrm{d}t$. Vi får att t går från 0 till 1. Därmed kan integralen skrivas

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma (x+y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y &= \int_{t=0}^{1} ((t+t^{3/2}) + (t+t^{3/2})3\sqrt{t}/2)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t=0}^{1} \left(t+t^{3/2}\right)\left(1+\frac{3\sqrt{t}}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{t=0}^{1} \left(t + \frac{5t^{3/2}}{2} + \frac{3t^2}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^2}{2} + t^{5/2} + \frac{t^3}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2.
\end{aligned}
$$

Alternativt kan vi konstatera att fältet $\boldsymbol{F}(x,y) = (x+y, x+y)$ är konservativt, eftersom

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1 = \frac{\partial F_1}{\partial y},$$

och då är vi fria att byta väg. Parametriseringen $x = y = t$ ger $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = \mathrm{d}t$ och integralen

$$\int_\Gamma (x+y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 4t\,\mathrm{d}t = \left[2t^2\right]_0^1 = 2.$$

Ett tredje alternativ är att beräkna potentialen Φ till $\boldsymbol{F}$. Vi får

$$x+y=F_1=\frac{\partial\Phi}{\partial x} \implies \Phi(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+g(y).$$

Ur detta får vi

$$x+y=F_2=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=x+g'(y) \implies g'(y)=y \implies g(y)=\frac{y^2}{2}+C,$$

vilket ger

$$\Phi(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+\frac{y^2}{2}+C.$$

Alltså har vi

$$\int_\Gamma (x+y)\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y=\Phi(1,1)-\Phi(0,0)=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-0=2.$$

9. (a) Visa att om $\boldsymbol{x}$ är en egenvektor till matriserna A och B så är x en egenvektor till matrisen AB.
   (b) Antag att $\boldsymbol{x}$ är en egenvektor till matriserna B och AB och att dess egenvärde för matrisen B inte är noll. Är det sant att $\boldsymbol{x}$ då blir en egenvektor till A?
   (c) Antag att $\boldsymbol{x}$ är en egenvektor till matriserna A och AB och att dess egenvärde för matrisen A inte är noll. Är det sant att $\boldsymbol{x}$ då blir en egenvektor till B?

Lösning:

(a) Antag att $A\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{x}$ och $B\boldsymbol{x}=\lambda_2\boldsymbol{x}$. Då följer

$$(AB)\boldsymbol{x}=A(B\boldsymbol{x})=A\lambda_2\boldsymbol{x}=\lambda_2A\boldsymbol{x}=\lambda_2\lambda_1\boldsymbol{x},$$

vilket visar att $\boldsymbol{x}$ är en egenvektor till AB med egenvärdet $\lambda_1\lambda_2$.

(b) Vi antar att $(AB)\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{x}$ och $B\boldsymbol{x}=\lambda_2\boldsymbol{x}$, där $\lambda_2\neq 0$. Då följer

$$A\boldsymbol{x}=\frac{A\lambda_2\boldsymbol{x}}{\lambda_2}=\frac{AB\boldsymbol{x}}{\lambda_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\boldsymbol{x},$$

så A har egenvektorn $\boldsymbol{x}$ med egenvärdet λ_1/λ_2.

(c) Sätt

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

För vektorn $(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$ gäller då att $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ och $AB\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ men $B\boldsymbol{x} = (1,0,0)^{\mathrm{T}} \neq \lambda\boldsymbol{x}$. Alltså är $\boldsymbol{x}$ inte en egenvektor till B, trots att den är en egenvektor till A och AB.

10. En glass-strut med höjd h och öppningsradie R fås (med öppningen nedåt) genom att rita funktionsytan

$$z(x,y) = h - \frac{h\sqrt{x^2+y^2}}{R}.$$

Dess volym ges av $V(h,R) = \pi hr^2/3$ och dess mantelarea av $A(h,R) = \pi R\sqrt{h^2+R^2}$.

(a) Antag att vi vill minimera mantelarean för en fixerad volym V_0. Vilket blir då sambandet mellan h och R?

(b) Härled formeln för antingen volymen eller mantelarean.

Lösning:

(a) Vi ska minimera funktionen $A(h,R) = \pi R\sqrt{h^2+R^2}$ givet att $V(h,R) - V_0 = \pi hR^2/3 - V_0 = 0$. Vi definierar därför Lagrangianen

$$\begin{aligned} L(h,R,\lambda) &= A(h,R) + \lambda(V(h,R) - V_0) \\ &= \pi R\sqrt{h^2+R^2} + \lambda(\pi hR^2/3 - V_0). \end{aligned}$$

Genom att sätta $\nabla L = \mathbf{0}$ får vi ekvationerna

$$\begin{aligned} \frac{\pi hR}{\sqrt{h^2+R^2}} + \frac{\lambda\pi R^2}{3} &= 0 \\ \pi\sqrt{h^2+R^2} + \frac{\pi R^2}{\sqrt{h^2+R^2}} + \frac{2\lambda\pi hR}{3} &= 0 \\ \frac{\pi hR^2}{3} &= 0 \end{aligned}$$

Förlänger vi den första av dessa med $2h$ och den andra med R får de en gemensam term, nämligen $2\lambda hR^2/3$. Subtraherar vi sedan den andra förlängda ekvationen från den första får vi

$$\frac{2\pi h^2 R}{\sqrt{h^2+R^2}} - \pi R\sqrt{h^2+R^2} - \frac{\pi R^3}{\sqrt{h^2+R^2}} = 0.$$

Eftersom $\pi R/\sqrt{h + R^2} \neq 0$ kan vi förkorta med den faktorn, vilket ger

$$0 = 2h^2 - (h^2 + R^2) - R^2 = h^2 - 2R^2,$$

och därur följer $h = \sqrt{2}R$.

(b) I polära koordinater ges volymen av

$$\begin{aligned} V &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} h\left(1 - \frac{r}{R}\right) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi h \int_0^R \left(r - \frac{r^2}{R}\right) \mathrm{d}r \\ &= 2\pi h \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R}\right]_0^R = 2\pi h \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{3}\right) = \frac{\pi h R^2}{3}. \end{aligned}$$

För mantelarean beräknar vi

$$\mathrm{d}S = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2}.$$

Här har vi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{hx}{R\sqrt{x^2 + y^2}}$$

och

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{hy}{R\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Detta ger

$$\mathrm{d}S = \sqrt{\frac{h^2x^2}{R^2(x^2 + y^2)} + \frac{h^2y^2}{R^2(x^2 + y^2)} + 1} = \sqrt{\frac{h^2}{R^2} + 1}.$$

Vi får alltså arean

$$\begin{aligned} A &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \mathrm{d}S \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \sqrt{\frac{h^2}{R^2} + 1}\,\mathrm{d}A \\ &= \pi R^2 \sqrt{\frac{h^2}{R^2} + 1} = \pi R \sqrt{h^2 + R^2}, \end{aligned}$$

där vi utnyttjat att arean av en cirkel med radie R är πR^2.

11. Beräkna flödet av vektorfältet $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x^3y, xz, yz^3)$ ut ur området begränsat av $x^2+z^2 \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $x \geq 0$, $z \geq 0$. Beräkna också flödet genom den del av begränsningytan till området som ges av $x^2+z^2 = 1$.

Lösning: Vi ska finna flödet ur ur ett område och kan således använda Gauss sats. Vi har

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 3x^2y + 0 + 3yz^2 = 3y(x^2+z^2).$$

Eftersom både området och integranden uppvisar cirkulärsymmetri kring y-axeln definierar vi polära koordinater kring y-axeln. Vi sätter $x = r\cos(\theta)$ och $z = r\sin(\theta)$, med gränserna $0 \leq \theta \leq \pi/2$ och $0 \leq r \leq 1$. Med dessa förberedelser får vi, med K som beteckning för området,

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial \mathrm{K}} (x^3y, xz, yz^3) \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S &= \iiint_{\mathrm{K}} 3y(x^2+z^2) \, \mathrm{d}V \\
&= 3 \int_{y=0}^{1} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{1} yr^2 r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}y \\
&= 3 \int_{y=0}^{1} y \, \mathrm{d}y \int_{\theta=0}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_{r=0}^{1} r^3 \, \mathrm{d}r \\
&= \frac{3\pi}{2} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{16}.
\end{aligned}$$

För att sedan beräkna flödet genom den angivna sidan drar vi bort flödet genom de andra sidorna från hela flödet ut ur området. Flödet genom de fyra återstående sidorna beräknas som följer.

Sidan i xy-planet, som ges av $z = 0$, $0 \leq x \leq 1$ och $0 \leq y \leq 1$, har utåtriktad normal $\boldsymbol{n} = (0,0,-1)$. Vi får $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} = -yz^3 = 0$, eftersom $z = 0$. Därmed går inget flöde genom denna sida. På samma sätt blir flödet genom sidan i yz-planet noll, eftersom vi där har $x = 0$ och $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{F} \cdot (-1,0,0) = -x^3y = 0$.

För de två sidorna parallella med xz-planet har vi normalerna $(0,-1,0)$ för $y = 0$ och $(0,1,0)$ för $y = 1$. Flödet genom sidan given av $y = 1$ blir då, där D betecknar området givet av $x^2+z^2 \leq 1$, $x \geq 0$ och $z \geq 0$,

$$\iint_{\mathrm{D}} \boldsymbol{F} \cdot (0,-1,0) \, \mathrm{d}A = \iint_{\mathrm{D}} -xz \, \mathrm{d}A,$$

och flödet genom sidan given av $y = 1$ blir

$$\iint_{\mathrm{D}} \boldsymbol{F} \cdot (0,1,0) \, \mathrm{d}A = \iint_{\mathrm{D}} xz \, \mathrm{d}A.$$

Summan av dessa blir noll och flödet genom sidan given av $x^2 + z^2 = 1$ blir således samma som totala flödet ut ur området.