Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Niklas Eriksen

Tentamen i tmv036C och tmv035C,
Analys och linjär algebra C för K, Kf och Bt
Lösningar
2010-01-12

---

1. Betrakta baserna

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

och

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Bestäm basbytesmatrisen P från B_1 till B_2. (Tips: Utnyttja standardbasen)

(b) Vektorn $\boldsymbol{w}$ skrivs i basen B_1 som

$$[\boldsymbol{w}]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm denna vektor uttryckt i basen B_2, det vill säga $[\boldsymbol{w}]_{B_2}$. Observera att denna uppgift går att lösa utan att ha bestämt basbytesmatrisen, även om detta underlättar.

Lösning:

(a) Den matris som byter från B_1 till standardbasen ges av matrisen med basvektorerna som kolonner, det vill säga

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Den matris som byter från standarsbasen till B_2 ges av inversen till motsvarande matris för B_2, det vill säga

$$P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Basbytesmatrisen från B_1 till B_2 fås nu genom att först byta till standardbasen och sedan till B_2, vilket ger

$$P = P_2^{-1}P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}.$$

(b) Vi multiplicerar med basbytesmatrisen och får

$$[\boldsymbol{w}]_{B_2} = P[\boldsymbol{w}]_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Kontrollera gärna att svaret är korrekt genom att beräkna $\boldsymbol{w}$ i standardbasen utgående från både $[\boldsymbol{w}]_{B_1}$ och $[\boldsymbol{w}]_{B_2}$.

2. Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

ortogonalt.

Lösning: Egenvärdena beräknas genom

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (6-\lambda)(3-\lambda) - 4 \\ &= \lambda^2 - 9\lambda + 14 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 7). \end{aligned}$$

Egenvärdena är således 2 och 7. Ekvationerna $(A - \lambda I)\boldsymbol{v} = 0$ för dessa värden löses av $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2)^{\mathrm{T}}$ och $\boldsymbol{v}_2 = (2, -1)^{\mathrm{T}}$. Dessa är ortogonala, och normeras genom att delas med $\sqrt{5}$. Alltså gäller

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Genom varje punkt $(x, y, z) = (a, b, 1/ab)$ på funktionsytan $z = f(x, y) = 1/xy$ går ett tangentplan (antag $a > 0$, $b > 0$). Varje tangentplan bildar tillsammans med koordinatplanen $x = 0$, $y = 0$ och $z = 0$ en tetraeder. Låt x_0 vara skärningspunkten mellan tangentplanet och x-axeln och definiera y_0 och z_0 på motsvarande sätt. Då ges volymen av tetraedern av $V = x_0y_0z_0/6$. Bestäm volymen av tetraedern. I vilken punkt $(x, y, z) = (a, b, 1/ab)$ blir volymen störst?

Lösning: Vi deriverar och får $f'_1 = -1/x^2y$ och $f'_2 = -1/xy^2$. Tangentplanets ekvation är

$$z - \frac{1}{ab} = \frac{-1}{a^2b}(x-a) + \frac{-1}{ab^2}(y-b) = \frac{2}{ab} - \frac{x}{a^2b} - \frac{y}{ab^2}.$$

För att beräkna x_0 sätter vi $y = z = 0$ och får

$$-\frac{1}{ab} = \frac{2}{ab} - \frac{x_0}{a^2b},$$

vilket ger $x_0 = 3a$. På samma sätt får $y_0 = 3b$ och $z_0 = 3/ab$. Sammantaget har vi alltså

$$V = \frac{1}{6} \cdot 3a \cdot 3b \cdot \frac{3}{ab} = \frac{27}{6}.$$

Volymen är alltså oberoende av vilken punkt på kurvan vi väljer!

4. Bestäm det största och minsta värdet av $f(x,y) = xy(1-x-y)$ på kvadraten $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

   Lösning: I det inre av kvadraten måste ett eventuellt extremvärde antas i punkter där $\nabla f = \mathbf{0}$. Vi får $\mathbf{0} = \nabla f = (y(1-x-y)-xy), x(1-x-y)-xy) = (y(1-2x-y), x(1-x-2y))$. Eftersom $x = 0$ eller $y = 0$ enbart ger punkter på randen eller utanför området antar vi $x, y > 0$ och får då $1 = 2x+y = x+2y$, med enda lösning $x = y = 1/3$. Denna punkt ligger i det inre och ger funktionsvärdet $f(1/3, 1/3) = 1/27$.

   Av symmetriskäl gäller att $f(t,0) = f(0,t)$ och $f(t,1) = f(1,t)$, så vi behöver bara kolla två av randstyckena. För det första av dessa har vi $g_1(t) = f(t,0) = 0$. För det andra har vi $g_2(t) = f(t,1) = t(1-t-1) = -t^2$. Derivatan ger $g'_2(t) = -2t = 0$ som saknar lösning för $0 < t < 1$.

   Kritiska punkter är således $(1/3, 1/3)$ och hörnen. Vi ser direkt att tre hörn ger funktionsvärdet 0 och det fjärde ger $f(1,1) = -1$. Alltså är maxvärdet $1/27$ och minvärdet -1.

5. Låt T vara triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(1,1)$. Beräkna dubbelintegralen

   $$\iint_{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{d}A}{(1+x+y)^2}$$

   Lösning: Området är tältformat (ruta figur!). Om vi väljer att integrera med x ytterst måste vi dela upp integralen i två delar med olika gränser. Vi väljer därför att ha x innerst och hoppas att integranden blir hanterlig. Gränserna i x-led blir då $x = y$ och $x = 2 - y$.

Vi får

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{d}A}{(1+x+y)^2} &= \int_{y=0}^{1} \int_{x=y}^{2-y} \frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{y=0}^{1} \left[\frac{-1}{1+x+y}\right]_{y}^{2-y} \mathrm{d}y \\
&= \int_{y=0}^{1} \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{1+2y}\right) \mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{-y}{3} + \frac{\ln(1+2y)}{2}\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2} - \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

6. Beräkna volymen av området som begränsas av $(x+1)^2 + y^2 \leq 2$ och $0 \leq z \leq x^2 + y^2$.

   Lösning: Området $(x+1)^2 + y^2 \leq 2$ är en cirkel med radie $\sqrt{2}$ och centrum i $(x, y) = (-1, 0)$. Vi övergår därför till polära koordinater med detta centrum, det vill säga

$$
\begin{aligned}
x &= -1 + r\cos\theta; \\
y &= r\sin\theta.
\end{aligned}
$$

   Integralen blir då

$$
\begin{aligned}
\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}A &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{2}} ((-1 + r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (1 + r^2 - 2\cos\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (r + r^3)\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\left[2r^2 + r^4\right]_0^{\sqrt{2}} = 4\pi.
\end{aligned}
$$

   Vi utnyttjade ovan att integralen av $\cos\theta$ blir noll om θ får löpa över en hel period.

7. Beräkna

$$
\oint_\gamma (\mathrm{e}^x \cos x - y)\,\mathrm{d}x + \left(2xy + \arctan y^2\right)\,\mathrm{d}y
$$

   moturs runt randen γ till området D som ges av $x^2 \leq y \leq x$.

Lösning: Vi använder Greens formel:

$$\begin{aligned}
&\oint_\gamma \left(\mathrm{e}^x \cos x - y\right)\,\mathrm{d}x + \left(2xy + \arctan y^2\right)\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{\mathrm{D}} \left(\frac{\partial(2xy + \arctan y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(\mathrm{e}^x \cos x - y)}{\partial y}\right)\,\mathrm{d}A \\
&= \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{x} (2y+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[y^2 + y\right]_{x^2}^{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x^2 + x - x^4 - x^2\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x - x^4\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}.
\end{aligned}$$

8. Beräkna flödet av $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (3xz^2, y + \sin z, y^2 - z)$ ut genom halvklotet $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $x \ge 0$.

   Lösning: Vi använder Gauss sats och får

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial K} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S &= \iiint_K \nabla \cdot \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V \\
&= \iiint_K (3z^2 + 1 - 1)\,\mathrm{d}V \\
&= 3 \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^{1} \rho^2 \cos^2\varphi\ \rho^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\
&= 3\pi \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos^2\varphi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_{\rho=0}^{1} \rho^4\,\mathrm{d}\rho \\
&= 3\pi \left[\frac{-\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi} \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{5}(1+1)(1+0) = \frac{2\pi}{5}.
\end{aligned}$$

9. Lös initialvärdesproblemet $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ för

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

givet att $\boldsymbol{x}(0) = (5, 3, 4)^{\mathrm{T}}$.

Lösning: Egenvärdena beräknas genom (utveckla längs andra kolonnen)

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)((3-\lambda)(-1-\lambda) + 8) \\ &= (4-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) \end{aligned}$$

Ett egenvärde är uppenbarligen 4. De andra ges av lösningarna till andragradsekvationen: $\lambda = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2\mathrm{i}$.

Vi ser enkelt att egenvektorn till egenvärdet 4 är $(0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$. Egenvektorn till $\lambda = 1 + 2\mathrm{i}$ beräknas här; beräkningen av egenvektorn till $\lambda = 1 - 2\mathrm{i}$ är analog och i detta sammanhang inte nödvändig. Vi har

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-2\mathrm{i} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3-2\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2-2\mathrm{i} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -2-2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 3-2\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2-2\mathrm{i} & 0 \end{array}\right)$$

genom att förlänga första raden med $1 + \mathrm{i}$. En egenvektor blir således $(2+2\mathrm{i}, 0, 4)^{\mathrm{T}} = (2+2\mathrm{i})(1, 0, 1-\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$. Den tredje egenvektorn kan skrivas $(1, 0, 1+\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$.

Vi använder nu $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$ för att skriva lösningarna från egenvärdet $1 + 2\mathrm{i}$ som

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix} (\cos 2t + \mathrm{i}\sin 2t))\,\mathrm{e}^t \\ &= \left(\begin{pmatrix} \cos 2t \\ 0 \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 0 \\ \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix} \right) \mathrm{e}^t. \end{aligned}$$

Eftersom de reella och imaginära lösningarna är linjärt oberoende kan båda användas till den fullständiga lösningen. Detta ger samma slutresultat som om vi adderat hela denna lösning till lösningarna från det tredje egenvärdet.

Den generella lösningen av differentialekvationen blir

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{4t} + \left(c_2 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ 0 \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 0 \\ \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix} \right) \mathrm{e}^{t}.$$

För $t = 0$ fås

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

som löses av $c_1 = 3$, $c_2 = 5$ och $c_3 = 1$. Problemet löses alltså av

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{4t} + \begin{pmatrix} 5\cos 2t + \sin 2t \\ 0 \\ 4\cos 2t + 6\sin 2t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t}$$

10. Vi ska tillverka ett akvarium i form av en rätvinklig låda utan lock. Akvariet ska rymma 54 liter vatten. Bottenplattan görs i metall med ytdensitet 400 gram per kvadratdecimeter och sidorna i glas med ytdensitet 100 gram per kvadratdecimeter. Vilken är den minsta vikten akvariet kan ha?

    Lösning: Låt x och y beteckna akvariets längder i horisontalled och z dess höjd. Akvariets vikt ges då av

    $$w(x, y, z) = 400xy + 2 \cdot 100xz + 2 \cdot 100yz = 200(2xy + xz + xy).$$

    Vi har dessutom kravet att volymen $v(x, y, z) = xyz = 54$. Eftersom detta är ett optimeringsproblem med bivillkor verkar det vettigt att använda Lagrange.

    Lagrangianen blir

    $$\begin{aligned} L(x, y, z, \lambda) &= w(x, y, z) - \lambda(v(x, y, z) - 54) \\ &= 200(2xy + xz + yz) - \lambda(xyz - 54). \end{aligned}$$

    Villkoret $\nabla L = \mathbf{0}$ ger ekvationerna

    $$\begin{aligned} 200(2y + z) &= \lambda yz; \\ 200(2x + z) &= \lambda xz; \\ 200(x + y) &= \lambda xy; \\ xyz &= 54. \end{aligned}$$

Den första minus den andra av dessa ekvationer ger $400(y - x) = (y-x)\lambda z$, vilket ger antingen $x = y$ eller $\lambda z = 400$. Det senare insatt i första ekvationen ger dock $z = 0$, vilket inte är förenligt med $xyz = 54$. Alltså gäller $x = y$, vilket reducerar ekvationerna till

$$\begin{aligned} 200(2x+z) &= \lambda xz; \\ 400 &= \lambda x; \\ x^2 z &= 54. \end{aligned}$$

De två första kan enkelt slås samman till $200(2x+z) = 400z$, som ger $z = 2x$. Vi har alltså $2x^3 = 54$ och därmed $x = y = 3$ och $z = 6$. Efterom vikten växer obegränsat om vi låter någon variablerna växa sig stor är detta ett minimum. Minimivikten blir således $w(3,3,6) = 400 \cdot 9 + 200 \cdot 18 + 200 \cdot 18 = 10{,}8$kg.

11. Låt $a > 0$ och betrakta den kropp som begränsas ovanifrån av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ och underifrån av paraboloiden $x^2 + y^2 = 2az$. Vilken area har denna kropp?

    Lösning: Kropparnas skärningskurva ges av de punkter som uppfyller båda ekvationerna. Vi sätter in paraboloiden i sfären och får $z^2 + 2az - 3a^2 = 0$, vilket ger $z = -a \pm \sqrt{a^2 + 3a^2} = -a \pm 2a$. Paraboloidens ekvation tvingar z att vara icke-negativ, så vi får $z = a$. Då gäller således $x^2 + y^2 = 2a^2$.

    Arean ges av

$$A = \iint_{\mathrm{D}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}A,$$

där D ges enligt ovan. För paraboloiden har vi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a}$$

och

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{a},$$

vilket ger

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}}.$$

Arean blir då, efter övergång till polära koordinater

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}a}\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta &= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}a}\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}}r\,\mathrm{d}r \\
&\quad \left\{t = r^2/a^2,\ \mathrm{d}t = 2r/a^2\,\mathrm{d}r\right\} \\
&= \pi a^2\int_{t=0}^{2}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \pi a^2\left[\frac{2(1+t)^{3/2}}{3}\right]_0^2 = \frac{2\pi a^2}{3}(3\sqrt{3}-1).
\end{aligned}$$

För sfären får vi, genom att skriva $z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}}$$

och

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}},$$

vilket ger

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{(3a^2-x^2-y^2)+x^2+y^2}{3a^2-x^2-y^2}} = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}}.$$

Denna area blir då

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}a\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{r}{\sqrt{3a^2-r^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta &= 2\sqrt{3}\pi a\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{r}{\sqrt{3a^2-r^2}}\,\mathrm{d}r \\
&\quad \left\{t = 3a^2 - r^2,\ \mathrm{d}t = -2r\,\mathrm{d}r\right\} \\
&= \sqrt{3}\pi a\int_{a^2}^{3a^2}\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{3}\pi a\left[2\sqrt{t}\right]_{a^2}^{3a^2} \\
&= 2\sqrt{3}\pi a(\sqrt{3}a - a) = 2\pi a^2(3-\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Vi slår ihop dessa och får arean

$$\frac{2\pi a^2}{3}(3\sqrt{3}-1) + 2\pi a^2(3-\sqrt{3}) = \pi a^2(2\sqrt{3}-2/3+6-2\sqrt{3}) = \frac{16\pi a^2}{3}.$$