1. Bestäm gradienten till

$$f(x,y,z) = \frac{xz^3}{2+y}.$$

I vilken riktning växer f snabbast i punkten $(x,y,z) = (1,1,1)$ och hur snabbt växer f i den riktningen.

Lösning: Vi har

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&= \left(\frac{z^3}{2+y}, \frac{-xz^3}{(2+y)^2}, \frac{3xz^2}{2+y}\right) \\
&= \frac{z^2}{2+y}\left(z, -\frac{xz}{2+y}, 3x\right).
\end{aligned}$$

Vi får då $\nabla f(1,1,1) = (1, 1/3, 3)/3 = (3,1,9)/9$. Den riktning som f växer snabbast i ges av gradienten. I detta fall är riktningen $(3,1,9)$ och tillväxtfarten

$$\|\nabla f(1,1,1)\| = \frac{\sqrt{9+1+81}}{9} = \frac{\sqrt{91}}{9}.$$

2. Antag att funktionen $f(t)$ är deriverbar. Låt $t(x,y) = x^2 + xy^2$ och sätt $u(x,y) = f(t(x,y))$. Beräkna $\frac{\partial u}{\partial x}$ och $\frac{\partial u}{\partial y}$ med hjälp av kedjeregeln och visa att $u(x,y)$ uppfyller differentialekvationen

$$2xy\frac{\partial u}{\partial x} - (2x+y^2)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Lösning: Vi har $u(x,y) = f(t(x,y))$ för $t(x,y) = x^2 + xy^2$ och använder kedjeregeln. Vi får

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(t)\frac{\partial t}{\partial x} = f'(t)(2x+y^2)$$

och

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(t)\frac{\partial t}{\partial y} = f'(t)2xy.$$

Därmed gäller

$$2xy\frac{\partial u}{\partial x} - (2x+y^2)\frac{\partial u}{\partial y} = 2xyf'(t)(2x+y^2) - (2x+y^2)f'(t)2xy = 0.$$

3. Bestäm största och minsta värdet av funktionen

$$f(x, y) = x^2 + \ln(1 + x^2 + y^2)$$

på enhetscirkeln $x^2 + y^2 \leq 1$.

Lösning: I det inre av området får vi kolla om gradienten har något nollställe. Vi får

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = \nabla f &= \left(2x + \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}\right) \\ &= \left(2x\left(1 + \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\right), \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}\right). \end{aligned}$$

I den första komponenten är den andra faktorn positiv, så vi får $x = 0$. I den andra komponenten ser vi direkt att $y = 0$. Enda kritiska punkten i det inre är således $(0, 0)$.

Utnyttjar vi att $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \leq x \leq 1$ på randen får vi $g(x) = f(x, \pm\sqrt{1 - x^2}) = x^2 + \ln(2)$. Kritiska punkter i det inre uppfyller $0 = g'(x) = 2x$, vilket ger $x = 0$. På randen innebär detta $(0, 1)$ och $(0, -1)$. Vi har dessutom punkterna $(1, 0)$ och $(-1, 0)$, som är intervallets ändpunkter för $g(x)$.

Alternativt hade vi kunnat skriva $h(t) = f(\cos(t), \sin(t)) = \cos^2(t) + \ln(2)$, med derivatan $h'(t) = -2\cos(t)\sin(t)$. Nollställena vid vinklarna $0, \pi/2, \pi$ och $3\pi/2$ ger samma punkter som ovan.

Funktionsvärdena blir $f(0, 0) = 0$, $f(0, 1) = f(0, -1) = \ln(2)$ samt $f(1, 0) = f(-1, 0) = 1 + \ln(2)$. Eftersom $\ln(2) > 0$ ges max av $1 + \ln(2)$ och min av 0.