1. Bestäm gradienten till

$$f(x,y,z) = \frac{y^3 z}{2+x}.$$

I vilken riktning växer f snabbast i punkten $(x,y,z) = (1,1,1)$ och hur snabbt växer f i den riktningen.

Lösning: Vi har

$$\begin{aligned} \nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ &= \left(-\frac{y^3 z}{(2+x)^2}, \frac{3y^2 z}{2+x}, \frac{y^3}{2+x}\right) \\ &= \frac{y^2}{2+x}\left(-\frac{yz}{2+x}, 3z, y\right). \end{aligned}$$

Vi får då $\nabla f(1,1,1) = (1/3, 3, 1)/3 = (1,9,3)/9$. Den riktning som f växer snabbast i ges av gradienten. I detta fall är riktningen $(1,9,3)$ och tillväxtfarten

$$\|\nabla f(1,1,1)\| = \frac{\sqrt{1+81+9}}{9} = \frac{\sqrt{91}}{9}.$$

2. Antag att funktionen $f(t)$ är deriverbar. Låt $t(x,y) = x^2y + y^3$ och sätt $u(x,y) = f(t(x,y))$. Beräkna $\frac{\partial u}{\partial x}$ och $\frac{\partial u}{\partial y}$ med hjälp av kedjeregeln och visa att $u(x,y)$ uppfyller differentialekvationen

$$(x^2+3y^2)\frac{\partial u}{\partial x} - 2xy\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Lösning: Vi har $u(x,y) = f(t(x,y))$ för $t(x,y) = x^2y + y^3$ och använder kedjeregeln. Vi får

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(t)\frac{\partial t}{\partial x} = f'(t)2xy$$

och

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(t)\frac{\partial t}{\partial y} = f'(t)(x^2+3y^2).$$

Därmed gäller

$$(x^2+3y^2)\frac{\partial u}{\partial x} - 2xy\frac{\partial u}{\partial y} = (x^2+3y^2)f'(t)2xy - 2xyf'(t)(x^2+3y^2) = 0.$$

3. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = y^2 + \ln(1 + x^2 + y^2)$ på enhetscirkeln $x^2 + y^2 \leq 1$.

   Lösning: I det inre av området får vi kolla om gradienten har något nollställe. Vi får

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = \nabla f &= \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, 2y + \frac{2y}{1+x^2+y^2}\right) \\ &= \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, 2y\left(1 + \frac{1}{1+x^2+y^2}\right)\right).\end{aligned}$$

   I den andra komponenten är den andra faktorn positiv, så vi får $y = 0$. I den första komponenten ser vi direkt att $x = 0$. Enda kritiska punkten i det inre är således $(0,0)$.

   Utnyttjar vi att $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \leq y \leq 1$ på randen får vi $g(y) = f(\pm\sqrt{1-y^2}, y) = y^2 + \ln(2)$. Kritiska punkter i det inre uppfyller $0 = g'(y) = 2y$, vilket ger $y = 0$. På randen innebär detta $(1,0)$ och $(-1,0)$. Vi har dessutom punkterna $(0,1)$ och $(0,-1)$, som är intervallets ändpunkter för $g(y)$.

   Alternativt hade vi kunnat skriva $h(t) = f(\cos(t), \sin(t)) = \sin^2(t) + \ln(2)$, med derivatan $h'(t) = 2\cos(t)\sin(t)$. Nollställena vid vinklarna $0, \pi/2, \pi$ och $3\pi/2$ ger samma punkter som ovan.

   Funktionsvärdena blir $f(0,0) = 2$, $f(1,0) = f(-1,0) = 1 + \ln(2)$ samt $f(0,1) = f(0,-1) = 1 + \ln(2)$. Eftersom $\ln(2) > 0$ ges max av $1 + \ln(2)$ och min av 0.