1. Beräkna
$$\iint_D x\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}A,$$
där D är rektangeln $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$.

Lösning: Vi får
$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{1} x\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{x=0}^{2}\left[\frac{x\mathrm{e}^{xy}}{x}\right]_{y=0}^{1}\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e})\,\mathrm{d}x \\ &= [\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}]_0^2 = \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} - 1.\end{aligned}$$

2. Beräkna
$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{1}\frac{x}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$
Ett tips är att byta integrationsordning. Glöm inte att rita figur så att gränserna blir korrekta.

Lösning: Sedan vi bytt integrationsordning varierar y mellan 0 och 1, och x mellan 0 och $\sqrt{y}$. Vi får
$$\begin{aligned}\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{\sqrt{y}}\frac{x}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{y=0}^{1}\left[\frac{x^2}{2(1+y^2)}\right]_{x=0}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}y \\ &= \int_{y=0}^{1}\frac{y}{2(1+y^2)}\,\mathrm{d}y \\ \left\{t = y^2,\ \mathrm{d}t = 2y\,\mathrm{d}y\right\} & \\ &= \int_{t=0}^{1}\frac{1}{4(1+t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{\ln|1+t|}{4}\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{4}.\end{aligned}$$

3. Beräkna
$$\iint_D \ln(3+x^2+y^2)\,\mathrm{d}A,$$
där D ges av $x^2+y^2 \le 2$.

Lösning: Vi byter till polära koordinater och utnyttjar då $x^2+y^2 = r^2$

och $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$. Således,

$$\begin{aligned}
\iint_D \ln(3 + x^2 + y^2)\,\mathrm{d}A &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{2}} \ln(3 + r^2) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \ln(3 + r^2) r\,\mathrm{d}r \\
\{t = 3 + r^2,\ \mathrm{d}t = 2r\,\mathrm{d}r\} & \\
&= \pi \int_{t=3}^{5} \ln(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \pi\left[t\ln(t) - t\right]_3^5 = \pi(5\ln 5 - 3\ln 3 - 2).
\end{aligned}$$