1. Beräkna
$$\iint_D y\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}A,$$
där D är rektangeln $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$.

Lösning: Vi får
$$\begin{aligned}\int_{y=1}^{2}\int_{x=0}^{1} y\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{y=1}^{2}\left[\frac{y\mathrm{e}^{xy}}{y}\right]_{x=0}^{1}\mathrm{d}y\\ &= \int_{y=1}^{2}(\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e})\,\mathrm{d}x\\ &= [\mathrm{e}^{y}-y\mathrm{e}]_1^2 = \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} - \mathrm{e} + \mathrm{e} = \mathrm{e}(\mathrm{e}-2).\end{aligned}$$

2. Beräkna
$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=y^2}^{1}\frac{y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
Ett tips är att byta integrationsordning. Glöm inte att rita figur så att gränserna blir korrekta.

Lösning: Sedan vi bytt integrationsordning varierar x mellan 0 och 1, och y mellan 0 och $\sqrt{x}$. Vi får
$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{\sqrt{x}}\frac{y}{1+x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{x=0}^{1}\left[\frac{y^2}{2(1+x^2)}\right]_{y=0}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\ &= \int_{x=0}^{1}\frac{x}{2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\\ &\left\{t = x^2,\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x\right\}\\ &= \int_{t=0}^{1}\frac{1}{4(1+t)}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{\ln|1+t|}{4}\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{4}.\end{aligned}$$

3. Beräkna
$$\iint_D \ln(2+x^2+y^2)\,\mathrm{d}A,$$
där D ges av $x^2+y^2 \le 3$.

Lösning: Vi byter till polära koordinater och utnyttjar då $x^2+y^2 = r^2$

och $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$. Således,

$$\begin{aligned}
\iint_D \ln(2+x^2+y^2)\,\mathrm{d}A &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{3}} \ln(2+r^2) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \int_{r=0}^{\sqrt{3}} \ln(2+r^2) r\,\mathrm{d}r \\
&\{t = 2+r^2,\ \mathrm{d}t = 2r\,\mathrm{d}r\} \\
&= \pi \int_{t=2}^{5} \ln(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \pi\left[t\ln(t) - t\right]_2^5 = \pi(5\ln 5 - 2\ln 2 - 3).
\end{aligned}$$