1. Beräkna
$$\oint_\Gamma (\sin(x^2) - 2y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y$$
moturs runt kvadraten med hörn i $(\pm 1, \pm 1)$.

Lösning: Denna uppgift löses enklast med Greens formel. Vi har
$$\begin{aligned}\oint_\Gamma (\sin(x^2) - 2y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y &= \iint \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(\sin(x^2) - 2y^2)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(2x + 4y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 6x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 12\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = 6\left[x^2\right]_{-1}^{1} = 0.\end{aligned}$$

2. Beräkna
$$\int_\Gamma (x + 2y)\,\mathrm{d}x + (2x + y)\,\mathrm{d}y$$
längs $x = y^3$ från $(0,0)$ till $(8,2)$.

Lösning: Vi parametriserar med $y = t$ och $x = y^3 = t^3$. Detta ger alltså $\boldsymbol{x}(t) = (t^3, t)$ och således $\boldsymbol{x}'(t) = (3t^2, 1)$. Parametern t går från 0 till 2. Insatt i integralen ger detta
$$\begin{aligned}\int_{t=0}^{2}\left((t^3 + 2t)3t^2 + (2t^3 + t)\right)\,\mathrm{d}t &= \int_{t=0}^{2}\left(3t^5 + 8t^3 + t\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^6}{2} + 2t^4 + \frac{t^2}{2}\right]_0^2 \\ &= 32 + 32 + 2 = 66.\end{aligned}$$

3. Beräkna flödet ut ur klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ av fältet
$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x + y^2, x^2 + z, y^2 + z).$$

Lösning: Enligt Gauss sats kan flödet beräknas med
$$\iiint_{\delta K} \nabla \cdot \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V.$$
I detta fall är $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 1 + 0 + 1 = 2$. Vi får flödet till 2 gånger klotets volym, vilket blir $8\pi a^3/3$.