1. Beräkna
$$\oint_\Gamma (\cos(x^2) - y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y$$
moturs runt kvadraten med hörn i $(\pm 1, \pm 1)$.

Lösning: Denna uppgift löses enklast med Greens formel. Vi har
$$\begin{aligned}\oint_\Gamma (\cos(x^2) - y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y &= \iint \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(\cos(x^2) - y^2)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (2x + 2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 4x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 8\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = 4\left[x^2\right]_{-1}^{1} = 0.\end{aligned}$$

2. Beräkna
$$\int_\Gamma (2x + y)\,\mathrm{d}x + (x + 2y)\,\mathrm{d}y$$
längs $y = x^3$ från $(0, 0)$ till $(2, 8)$.

Lösning: Vi parametriserar med $x = t$ och $y = x^3 = t^3$. Detta ger alltså $\boldsymbol{x}(t) = (t, t^3)$ och således $\boldsymbol{x}'(t) = (1, 3t^2)$. Parametern t går från 0 till 2. Insatt i integralen ger detta
$$\begin{aligned}\int_{t=0}^{2} \left((2t + t^3) + (t + 2t^3)3t^2\right)\,\mathrm{d}t &= \int_{t=0}^{2} \left(6t^5 + 4t^3 + 2t\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[t^6 + t^4 + t^2\right]_0^2 \\ &= 64 + 16 + 4 = 84.\end{aligned}$$

3. Beräkna flödet ut ur klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ av fältet
$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x + z^2, x^2 + y, x^3 + y^2 + z).$$

Lösning: Enligt Gauss sats kan flödet beräknas med
$$\iiint_{\delta K} \nabla \cdot \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V.$$
I detta fall är $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 1 + 1 + 1 = 2$. Vi får flödet till 3 gånger klotets volym, vilket blir $4\pi a^3$.