MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Analys och linjär algebra C för K, Kf och Bt, TMV035C,
15 mars 2008, 8.30-12.30.
Telefonjour: Jonatan Vasilis, 0762 - 721860
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan kommer att lämnas på kurshemsidan.
Lycka till!

Ordinarie tenta

Denna del riktar sig till de som inte har gjort hemtalen. De som har godkänt på alla hemtalsomgångar ska göra den mindre tentan. De som har godkänt på nästan alla hemtalsomgångar ska göra den mindre tentan samt tal k på denna, om de missat hemtalsomgång k. Gränsen för godkänt är 22 poäng. Preliminära gränser för högre betyg är 29 poäng för 4 och 36 poäng för femma.

---

1. Undersök vilka tal a, b och c som gör att matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & b & c \end{pmatrix}$$
har vektorn $\boldsymbol{v} = (1, 2, -1)^T$ som egenvektor. Vilket blir egenvärdet? (4p)

2. Diagonalisera matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$
ortogonalt. (4p)

3. Beräkna tangenplanet till funktionen $f(x, y) = xy + \sin(x - y)$ i punkten $(1, 1)$. Använd detta plan till att approximera $f(x, y)$ i punkten $(1.1, 1.2)$. (4p)

4. Visa att $3xy^2 + 1 \geq 0$ på området $x^2 + 2y^2 \leq 1$. (4p)

5. Bestäm

$$\iint_D y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

där D är området begränsat av $y = \sqrt{1-x}$, $y = \sqrt{1+x}$ och $y = 0$. (4p)

6. Ytan S är den del av $f(x,y) = 1 - x^2/2$ som ligger ovanför kvadraten $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Beräkna

$$\iint_S xy^2 \, \mathrm{d}S$$

över ytan S. (4p)

7. Beräkna kurvintegralen

$$\oint_\Gamma (\sin x - y^3) \, \mathrm{d}x + (x^3 + \cos y) \, \mathrm{d}y$$

ett varv moturs kring enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$. (4p)

8. Visa att funktionen $f(x,y) = (1 + \mathrm{e}^y) \cos x - y\mathrm{e}^y$ har oändligt många maximipunkter, men saknar minimipunkter. (6p)

9. Bestäm en ortogonal bas till kolonnrummet till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix},$$

samt en bas för det ortogonala komplementet till kolonnrummet. (6p)

10. En rätvinklig container med sidlängderna x, y och z är märkt med volymen $6\mathrm{m}^3$. Kan det stämma, om avståndet mellan de diametralt motsatta hörnen är $3\mathrm{m}$? (6p)

Mindre tenta

Denna del riktar sig till de som klarat hemtalen. De som har godkänt på alla hemtalsomgångar gör enbart den mindre tentan. De som har godkänt på nästan alla hemtalsomgångar ska göra den mindre tentan samt tal k på den ordinarie, om de missat hemtalsomgång k. Den som siktar på högre betyg än vad tidigare prestationer i kursen (främst hemtalen) visat, får även göra den ordinarie tentan. Då räknas det bästa betyget. Gränsen för godkänt är 12 poäng.

11. Lös initialvärdesproblemet $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ för

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

givet att $\boldsymbol{x}(0) = (5, 1)^{\mathrm{T}}$. (4p)

12. Vektorn $\boldsymbol{x} = (1, 2)^T$ i standardbasen ska skrivas i basen

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Gör detta med hjälp av en basbytesmatris. (4p)

13. Låt $f(x, y) = x^2/2 + 2xy - 2y^2$. Definiera $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ för $x(u, v) = u+v$ och $y(u, v) = u+2v$. Beräkna ∇g med hjälp av kedjeregeln. (4p)

14. Ett fönster med bredden $2x$ består av en rektangel med höjd y och ovanpå denna en halvcirkel med radie x. Bestäm fönstrets största möjliga area, om vi vet att dess omkrets är $4 + \pi$. (4p)

15. Beräkna

$$\int_{y=0}^{2} \int_{x=y/2}^{1} \sin(\pi x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(4p)

16. Bestäm flödet av fältet $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (z^2 \sin(y^2), \mathrm{e}^{x^3}, y^2 + z^2)$ ut ur halvklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$. (4p)