MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Analys och linjär algebra C för K, Kf och Bt, TMV036C, 14 mars 2009, 8.30–12.30.
Telefonjour: Martin Berglund, 0762 - 721860
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna. Exempelvis är räknedosa inte tillåten.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan kommer att lämnas på kurshemsidan.
Lycka till!

Den ordinarie tentan, för de som inte via hemtal eller duggor kvalificerat sig för den lilla tentan, består av samtliga nedanstående tal. Gränsen för godkänt är 22 poäng. Preliminära gränser för högre betyg är 30 poäng för fyra och 38 poäng för femma.

De som klarat hemtal eller dugga på minst två av kursens fyra delar kan välja att göra den lilla tentan, som består av uppgifterna 1-8. Maximala antalet poäng är 32 och gränsen för godkänt är 14. Den som saknar godkänt hemtal eller godkänd dugga på en eller två delar av kursen måste också klara minst 5 poäng på var och en av dessa missade delar. Till de två första uppgifter härför sig till del 1, uppgifterna 3 och 4 till del 2 och så vidare. Den som siktar på högre betyg än vad hemtal och duggor visat, får även göra den ordinarie tentan. Då räknas det bästa betyget.

1. Diagonalisera matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
ortogonalt. (4p)

2. Låt
$$U = \text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}.$$
Bestäm en ortogonal bas för U och projicera sedan $\boldsymbol{x} = (9, 1, -7)^{\mathrm{T}}$ på planet U. (4p)

3. Beräkna gradienten till funktionen $f(x, y) = \sin\left(\frac{x^2}{y}\right)$. Bestäm också en normal till funktionsytan i punkten $(x, y, z) = (\sqrt{\pi}, 1, 0)$ samt en normal (i planet) till nivåkurvan till $f(x, y)$ i punkten $(x, y) = (\sqrt{\pi}, 1)$. (4p)

Var god vänd!

4. Bestäm det största och minsta värdet av $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ på kvadraten $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$. (4p)

5. Beräkna
$$\int_{y=0}^{4} \int_{x=\sqrt{y}}^{2} y \cos(x^5)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
(4p)

6. Kroppen K ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \leq 0, z \geq 0$. Beräkna
$$\iiint_{\mathrm{K}} x\,\mathrm{d}V.$$
(4p)

7. Beräkna arean av den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ som ligger inuti cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och ovanför xy-planet, det vill säga $z > 0$. (4p)

8. Beräkna kurvintegralen
$$\int_{\Gamma} (x+y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y,$$
längs $y^2 = x^3$ från $(0,0)$ till $(1,1)$. (4p)

9. (a) Visa att om $\boldsymbol{x}$ är en egenvektor till matriserna A och B så är x en egenvektor till matrisen AB.
   (b) Antag att $\boldsymbol{x}$ är en egenvektor till matriserna B och AB och att dess egenvärde för matrisen B inte är noll. Är det sant att $\boldsymbol{x}$ då blir en egenvektor till A?
   (c) Antag att $\boldsymbol{x}$ är en egenvektor till matriserna A och AB och att dess egenvärde för matrisen A inte är noll. Är det sant att $\boldsymbol{x}$ då blir en egenvektor till B?

   (6p)

10. En glass-strut med höjd h och öppningsradie R fås (med öppningen nedåt) genom att rita funktionsytan
$$z(x,y) = h - \frac{h\sqrt{x^2+y^2}}{R}.$$
Dess volym ges av $V(h,R) = \pi hr^2/3$ och dess mantelarea av $A(h,R) = \pi R\sqrt{h^2+R^2}$.
   (a) Antag att vi vill minimera mantelarean för en fixerad volym V_0. Vilket blir då sambandet mellan h och R?
   (b) Härled formeln för antingen volymen eller mantelarean.

   (6p)

11. Beräkna flödet av vektorfältet $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x^3y, xz, yz^3)$ ut ur området begränsat av $x^2 + z^2 \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $x \geq 0$, $z \geq 0$. Beräkna också flödet genom den del av begränsningytan till området som ges av $x^2 + z^2 = 1$. (6p)