

MATEMATIK**Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet****Tentamen i Analys och linjär algebra C för K, Kf och Bt, TMV036C och TMV035C, 16 april 2009, 14.00–18.00.****Telefonjour: Jacob Sznajdman, 0762 - 721860**

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna. Exempelvis är räknedosa inte tillåten.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan kommer att lämnas på kurshemsidan.
Lycka till!

Den ordinarie tentan, för de som inte via hemtal eller duggor kvalificerat sig för den lilla tentan, består av samtliga nedanstående tal. Gränsen för godkänt är 22 poäng. Preliminära gränser för högre betyg är 28 poäng för fyra och 36 poäng för femma.

De som klarat hemtal eller dugga på minst två av kursens fyra delar kan välja att göra den lilla tentan, som består av uppgifterna 1-8. Maximala antalet poäng är 32 och gränsen för godkänt är 14. Den som saknar godkänt hemtal eller godkänd dugga på en eller två delar av kursen måste också klara minst 5 poäng på var och en av dessa missade delar. Till de två första uppgifter härför sig till del 1, uppgifterna 3 och 4 till del 2 och så vidare. Den som siktar på högre betyg än vad hemtal och duggor visat, får även göra den ordinarie tentan. Då räknas det bästa betyget.

1. Lös initialvärdesproblemet $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ för

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},$$

givet att $\mathbf{x}(0) = (1, 4)^T$. (4p)

2. Beräkna längden av kurvan $\mathbf{F}(t) = (\ln t, 2t, t^2)$ för $1 \leq t \leq e$. Glöm inte kvadreringsregeln. (4p)

3. Ljudnivån stiger under tentan i Vågrörelselära och på din medhavda ljudmätare (på den tentan är alla hjälpmedel tillåtna) mäter du nivån till 80 dB. Genom att sträcka ut mätare en meter åt öster (höger) minskar ljudnivån med 2 dB och en meter norrut (framåt) minskar ljudnivån med 1,5 dB. I vilken riktning växer ljudnivån snabbast, hur snabbt växer ljudnivån i den riktningen och hur starkt är ljudet hos den person som sitter snett framför dig, två meter till vänster och sex meter framåt? I det senare fallet får du använda linjär approximation. (4p)

Var god vänd!

4. Bestäm det största och minsta värdet av $f(x, y) = 2x^2 - y^2$ på området givet av $y \geq x^2$ och $x \geq y^2$. (4p)

5. Beräkna

$$\int_D x \, dA$$

eller

$$\int_D (x - y) \, dA$$

över fyrhörningen med hörn i $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 3)$ och $(1, 2)$. (4p)

6. Beräkna

$$\iiint_K e^z \, dV$$

över kroppen K som ges av $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$. (4p)

7. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\Gamma} y(y - x^2) \, dx + xy(3 + y) \, dy,$$

där Γ är randen till den nedre halvan av enhetscirkelskivan, det vill säga $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \leq 0$, genomlöst medurs. (4p)

8. Beräkna flödet av $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ ut genom halvklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$. (4p)

9. Antag att A är en symmetrisk matris som diagonaliseras $A = VDV^T$. Dess egenvärden betecknas $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

(a) Visa att om $\mathbf{y} = V^T \mathbf{x}$ så gäller $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y}$.

(b) Visa att $\mathbf{y}^T D \mathbf{y} = \sum_i \lambda_i y_i^2$

(c) Visa att det minsta värde vi kan få på uttrycket $\mathbf{y}^T D \mathbf{y}$ om $\|\mathbf{y}\| = 1$ är λ_1 .

(d) Visa att det minsta värde vi kan få på uttrycket $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ om $\|\mathbf{x}\| = 1$ är λ_1 .

(6p)

10. Bestäm och klassificera samtliga lokala extremvärden till funktionen

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2,$$

samt det största värdet av funktionen längs den slutna kurvan $x^4 + y^4 = 32$. (6p)

11. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (3yz, xz, 0)$. Beräkna arbetsintegralen

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} 3yz \, dx + xz \, dy,$$

där kurvan Γ är skärningskurvan mellan ytorna $z = x^2 + 1$ och $z = 2x^2 + y^2$. Beträktad ovanifrån genomlöps kurvan moturs. (6p)