MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Analys och linjär algebra C för K, Kf och Bt, TMV036C och TMV035C, 29 augusti 2009, 9.00–13.00.
Telefonjour: David Heintz, 0762 - 721861
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna. Exempelvis är räknedosa inte tillåten.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan kommer att lämnas på kurshemsidan.
Lycka till!

Den ordinarie tentan, för de som inte via hemtal eller duggor kvalificerat sig för den lilla tentan, består av samtliga nedanstående tal. Gränsen för godkänt är 22 poäng. Preliminära gränser för högre betyg är 28 poäng för fyra och 36 poäng för femma.

De som klarat hemtal eller dugga på minst två av kursens fyra delar kan välja att göra den lilla tentan, som består av uppgifterna 1-8. Maximala antalet poäng är 32 och gränsen för godkänt är 14. Den som saknar godkänt hemtal eller godkänd dugga på en eller två delar av kursen måste också klara minst 5 poäng på var och en av dessa missade delar. Till de två första uppgifter härför sig till del 1, uppgifterna 3 och 4 till del 2 och så vidare. Den som siktar på högre betyg än vad hemtal och duggor visat, får även göra den ordinarie tentan. Då räknas det bästa betyget.

---

1. Bestäm egenvärdena och en valfri egenvektor till matrisen
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$
(4p)

2. Lös initialvärdesproblemet $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ för
$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 8 & -5 \end{pmatrix},$$
givet att $\boldsymbol{x}(0) = (3, 4)^{\mathrm{T}}$. (4p)

3. I leken *Gömma nyckel* gömmer en av deltagarna (A) en nyckel, varefter den andra deltagaren (B) ska leta rätt på nyckeln. Som ledtrådar anger A *fågel*, *fisk* eller *mittemellan* för att ange nyckelns höjd (högt, lågt, mitten),

Var god vänd!

samt om det det blir varmare respektive kallare om B närmar sig nyckeln eller avlägsnar sig från den.

(a) Deltagare B går i riktningen $(3,1)$ men får genast besked att det blir kallare. B återvänder då till startpunkten och går i riktningen $(3,2)$. Då blir det till en början varken varmare eller kallare. I vilken riktning skulle B ha gått för att komma direkt till nyckeln?

(b) Deltagare B pekar i riktningen $(1,2,3)$ och undrar om det blir varmare eller kallare i denna riktning? Svaret blir åter att det varken blir varmare eller kallare. Fågel, fisk eller mittemellan?

(4p)

4. Receptsamlingen *En miljon lätta menyer* av Kerstin Wachtmeister bygger på att ett antal förrätter, varmrätter och efterrätter kombineras så att antalet kombinationer blir en miljon. Låt antalet förrätter vara x, antalet varmrätter vara y och antalet efterrätter vara z. Bestäm det minsta antalet rätter som behövs för att antalet menyer ska bli en miljon, det vill säga minimera $f(x,y,z) = x + y + z$ givet att $xyz = 1\ 000\ 000$. (4p)

5. Beräkna
$$\int_{\mathrm{D}} \frac{x+y}{2+x-y}\,\mathrm{d}A$$
över kvadraten given av $0 \le x+y \le 2$ och $-1 \le x-y \le 1$. Använd gärna ett lämpligt variabelbyte. (4p)

6. Visa att området D givet av $x^2+y^2 \le y$, $x \ge 0$ i polära koordinater kan skrivas som $0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le r \le \sin\theta$ och beräkna sedan
$$\iint_{\mathrm{D}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A$$
över området D. (4p)

7. Visa att fältet
$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(\frac{y^2\mathrm{e}^z}{z}, \frac{2xy\mathrm{e}^z}{z}, \frac{xy^2\mathrm{e}^z(z-1)}{z^2}\right)$$
är konservativt på området $z > 0$, och beräkna kurvintegralen
$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$
där Γ är den räta linjen från $(1,2,1)$ till $(3,3,1)$. (4p)

8. Beräkna flödet av $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y, x+z, z)$ ut genom klotet $x^2+y^2+z^2 \le 4$. (4p)

9. Bestäm och klassificera samtliga lokala extremvärden till funktionen
$$f(x,y) = (x+y)^2 + x^3 + x^2y - xy^2 - y^3.$$
(6p)

10. När man bygger pyramider bör man lägga de tyngsta stenarna så långt ner som möjligt, gärna nära mitten. En pyramid har byggts med hörn i $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(-1,0,0)$, $(0,-1,0)$ och $(0,0,2)$ med densitet $f(x,y,z) = 1/(1+|x|+|y|+|z|)^3$. Vad väger pyramiden? (6p)

11. Ytan Y beskriven av $x^2+y^2+2(z-1)^2 = 6$, $z \geq 0$ är övre delen av en avskuren ellipsoid. Beräkna

$$\iint_{\mathrm{Y}} (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S,$$

där normalen $\boldsymbol{n}$ är uppåtriktad och

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (xz - y^3 \cos z, x^3 \mathrm{e}^z, xyz\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}).$$

(6p)

Var god vänd!