MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Analys och linjär algebra C för K, Kf och Bt, TMV036C och TMV035C, 12 januari 2010, 14.00–18.00.
Telefonjour: Anna Nyström, 0703 - 088304
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna. Exempelvis är räknedosa inte tillåten.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan kommer att lämnas på kurshemsidan.
Lycka till!

Den ordinarie tentan, för dem som inte via hemtal eller duggor kvalificerat sig för den lilla tentan, består av samtliga nedanstående tal. Gränsen för godkänt är 22 poäng. Preliminära gränser för högre betyg är 28 poäng för fyra och 36 poäng för femma.

De som klarat hemtal eller dugga på minst två av kursens fyra delar kan välja att göra den lilla tentan, som består av uppgifterna 1-8. Maximala antalet poäng är 32 och gränsen för godkänt är 14. Den som saknar godkänt hemtal eller godkänd dugga på en eller två delar av kursen måste också klara minst 5 poäng på var och en av dessa missade delar. Till de två första uppgifter härför sig till del 1, uppgifterna 3 och 4 till del 2 och så vidare. Den som siktar på högre betyg än vad hemtal och duggor visat, får även göra den ordinarie tentan. Då räknas det bästa betyget.

---

1. Betrakta baserna
$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$
och
$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$
   (a) Bestäm basbytesmatrisen P från B_1 till B_2. (Tips: Utnyttja standardbasen)

   (b) Vektorn $\boldsymbol{w}$ skrivs i basen B_1 som
$$[\boldsymbol{w}]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
   Bestäm denna vektor uttryckt i basen B_2, det vill säga $[\boldsymbol{w}]_{B_2}$. Observera att denna uppgift går att lösa utan att ha bestämt basbytesmatrisen, även om detta underlättar.

Var god vänd!

(4p)

2. Diagonalisera matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$
ortogonalt. (4p)

3. Genom varje punkt $(x, y, z) = (a, b, 1/ab)$ på funktionsytan $z = f(x, y) = 1/xy$ går ett tangentplan (antag $a > 0$, $b > 0$). Varje tangentplan bildar tillsammans med koordinatplanen $x = 0$, $y = 0$ och $z = 0$ en tetraeder. Låt x_0 vara skärningspunkten mellan tangentplanet och x-axeln och definiera y_0 och z_0 på motsvarande sätt. Då ges volymen av tetraedern av $V = x_0 y_0 z_0/6$. Bestäm volymen av tetraedern. I vilken punkt $(x, y, z) = (a, b, 1/ab)$ blir volymen störst? (4p)

4. Bestäm det största och minsta värdet av $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ på kvadraten $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. (4p)

5. Låt T vara triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(2, 0)$ och $(1, 1)$. Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{d}A}{(1 + x + y)^2}$$
(4p)

6. Beräkna volymen av området som begränsas av $(x + 1)^2 + y^2 \le 2$ och $0 \le z \le x^2 + y^2$. (4p)

7. Beräkna
$$\oint_\gamma (\mathrm{e}^x \cos x - y)\,\mathrm{d}x + \left(2xy + \arctan y^2\right)\,\mathrm{d}y$$
moturs runt randen γ till området D som ges av $x^2 \le y \le x$. (4p)

8. Beräkna flödet av $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (3xz^2, y + \sin z, y^2 - z)$ ut genom halvklotet $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $x \ge 0$. (4p)

9. Lös initialvärdesproblemet $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ för
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
givet att $\boldsymbol{x}(0) = (5, 3, 4)^{\mathrm{T}}$. (6p)

10. Vi ska tillverka ett akvarium i form av en rätvinklig låda utan lock. Akvariet ska rymma 54 liter vatten. Bottenplattan görs i metall med ytdensitet 400 gram per kvadratdecimeter och sidorna i glas med ytdensitet 100 gram per kvadratdecimeter. Vilken är den minsta vikten akvariet kan ha? (6p)

11. Låt $a > 0$ och betrakta den kropp som begränsas ovanifrån av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ och underifrån av paraboloiden $x^2 + y^2 = 2az$. Vilken area har denna kropp? (6p)