Alla svar ska ges med fullständiga och välmotiverade lösningar. Ange vilka ni samarbetat med. Lämnas in senast måndagen den 16 februari, i samband med föreläsningen.

Ordinarie uppgifter

1. Funktionen $f(x,y) = \frac{10000}{403+x^2+y+y^2}$ anger för $x^2+y^2 \leq 2500$ höjden över havet för en kulle.
   (a) Vad är ∇f på bergets topp?
   (b) I punkten $(21, 12, 10)$ ska en flaggstång resas vinkelrätt mot marken. I vilken riktning ska flaggstången stå? Vilken vinkel har stången jämfört med en vertikal stång?
2. Låt $f(x,y) = \sin(x) + \arctan(x)\sin(y)$ ange markens höjd. Solen står långt bort i riktning $(3, -4)$ från alla punkter, i vinkeln $\pi/4$ ovan horisonten. Ligger några områden i skugga?
3. Approximera funktionen
$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = (ze^y,\ \sqrt{xz},\ x^2y + y^2\sin(z))$$
   i punkten $(x,y,z) = (4.03, 0.02, 8.95)$ utan hjälp av räknare.
4. Bestäm och karakterisera alla lokala extrempunkter till funktionen
$$f(x,y) = e^{-2y^2-4xy-x^4}.$$
5. Bestäm volymen och ange måtten av det största rätvinkliga rätblock med sidorna parallella med axlarna som kan sågas ur ut kroppen given av $x^2 + 4y^2 \leq z \leq 1$.
6. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y) = (x+y)(x^2+y^2-6)$ på området $x^2+y^2 \leq 4$.
7. Bestäm största och minsta värde som funktionen
$$f(x,y) = \frac{x^2+2y+4}{x^2y}$$
   antar i området begränsat av $y = x^2$, $y = 1$ och $x = 3$.
8. Vilka punkter på kurvan $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 6$ ligger närmast origo?

Bonusproblem (inget samarbete)

9. (a) Beräkna $\frac{\partial f}{\partial v}$ för $f(x,y) = x^2+y^2$, $u(x,y) = x - y + \sqrt{x-y}$ och $v(x,y) = x+y$.
   (b) Karakterisera de ”snälla” funktioner (som har kontinuerliga partiella derivator) i två variabler som uppfyller
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$
   genom att införa de nya variablerna $s = x+y$ och $t = x-y$ och derivera.

10. Bestäm det minsta avståndet från origo till den mängd av punkter som uppfyller $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ och $h(x, y, z) = xy + xz - 2 = 0$.

11. Visa deriveringsreglerna

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)) = \boldsymbol{u}'(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}'(t)$$

och

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\boldsymbol{u}(t)\| = \frac{\boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{u}'(t)}{\|\boldsymbol{u}(t)\|}$$

för $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t) \in \mathbf{R}^3$, $\boldsymbol{u}(t) \neq 0$.

12. Givet

$$\begin{aligned} D_{(1,2,3)} f &= 1; \\ D_{(2,3,1)} f &= -1; \\ D_{(3,1,2)} f &= 2, \end{aligned}$$

bestäm ∇f.