Alla svar ska ges med fullständiga och välmotiverade lösningar. Ange vilka ni samarbetat med. Lämnas in senast onsdagen den 25 februari, i samband med föreläsningen.

Ordinarie uppgifter

1. Beräkna
$$\iint_{\mathrm{D}} x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$
där D begränsas av parablerna $y = 2x^2 - x$ och $x = 2y^2 - y$.

2. Beräkna
$$\iint_{\mathrm{D}} \frac{x+y}{x^2+y^2} \mathrm{e}^{x-y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$
där D ges av $1 \le x^2 + y^2 \le 2$ och $0 \le x - y \le 1$.

3. Låt
$$I = \iint_{\mathrm{D}} (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$
där D ges av $x^2 + (y-1)^2 \le 1$. Beräkna I på två sätt, dels med polära koordinater kring origo, dels med polära koordinater kring $(0, 1)$.

4. Beräkna
$$\iint_{\mathrm{D}} \left(\mathrm{e}^{4x^2+y^2} + y^2 \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$
där D ges av $1 \le 4x^2 + y^2 \le 9$.

5. Ur ett klot med radien R tas en vertikal cylinder ut, så att återstoden har höjd h. Tänk på en äpple, som urkärnas med så bred urkärnare att det som är kvar får maxhöjd $h/2$ ovanför xy-planet. Hur stor blir volymen av det som blir kvar?

6. Beräkna
$$\iiint_{\mathrm{D}} z(x^2 + y^2) \, \mathrm{d}V,$$
där D ligger ovan planet $z = 1$ och under sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Genomför beräkningarna dels med z innerst, dels med z ytterst och dels med sfäriska koordinater.

7. Beräkna arean av funktionsytan till $z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ ovanför området $1 \le x^2+y^2 \le 4$.

Bonusproblem (inget samarbete)

8. Om en funktionskurva $z = f(x)$ roteras kring z-axeln fås en kropp. Dess volym kan beräknas med hjälp av två metoder från ALAb, nämligen cylindriska skal,
$$V = 2\pi \int x f(x) \, \mathrm{d}x,$$
och cirkelskivor,
$$V = \pi \int (f^{-1}(z))^2 \, \mathrm{d}z.$$

Härled dessa formler med hjälp av trippelintegraler och polära koordinater. Du får anta att $f(x) \geq 0$ (eller $f(x) \leq 0$) samt att $f(x)$ är strikt växande (eller strikt avtagande).

9. Beräkna

$$\iint_{\mathrm{D}} (x^2 + \sin y)\mathrm{e}^{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

där D är cirkelskivan kring origo med radie 2.

10. Visa att

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

för kontnuerliga funktioner $f(x)$, samt att likhet gäller om och endast om $f(x)$ är konstant. Tips: Integrera $(f(x) - f(y))^2$ över lämpligt område.