Alla svar ska ges med fullständiga och välmotiverade lösningar. Ange vilka ni samarbetat med. Lämnas in senast lördagen den 14 mars, innan tentamens början.

Ordinarie uppgifter

1. Beräkna
$$\int_\gamma \left(\frac{y}{(x+y)^2}+1\right)\mathrm{d}x - \frac{x}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}y,$$
där γ är cirkelbågen kring origo med radie 1 moturs från $(1,0)$ till $(0,1)$.

2. Bestäm en potential till vektorfältet
$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(\pi\cos(\pi x)\cos(\pi y) + \frac{\mathrm{e}^{yz}}{x^2} + 4 + \mathrm{e}^z, -\pi\sin(\pi x)\sin(\pi y) - \frac{z}{x}\mathrm{e}^{yz}, x\mathrm{e}^z - \frac{y}{x}\mathrm{e}^{yz}\right)$$
och beräkna sedan
$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$
där $\gamma = (t^3 - t^2 + 1, \mathrm{e}^{t^2-3t+2}, \sin(\pi t))$, $1 \le t \le 2$.

3. Beräkna
$$\int_\Gamma (x^2+xy)\,\mathrm{d}x + (x - xy^2)\,\mathrm{d}y$$
moturs runt triangeln med hörn i $(-1,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$. Lös problemet på två olika sätt.

4. Beräkna
$$\iint_{\mathrm{D}} \frac{x^2}{x^2+4y^2}\,\mathrm{d}S,$$
där ytan D ges av den del av paraboloiden $2z = x^2 + 2y^2$ som ligger inom cylindern $x^2 + 4y^2 = 1$. Ett tips är att använda elliptiska koordinater.

5. Beräkna flödet av $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (-\mathrm{e}^{yz}, \mathrm{e}^{xz}, z^2)$ ut genom konen T given av $z^2 = x^2+y^2$ för $0 \le z \le 1$. Konens lock räknas alltså inte med i begränsningsytan.

6. Beräkna flödet av vektorfältet
$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (2xy, y^3 - xy, z^2)$$
ur den ändliga volym som begränsas av ytorna $y^2 + 2y = x^2 + z^2$ och $y = 4$.

7. Beräkna
$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
för $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y+2x, x^2+z, y)$ längs den slutna kurvan $\boldsymbol{r} = (\cos\theta, \sin\theta, f(\theta))$, där $0 \le \theta \le 2\pi$ och $f(0) = f(2\pi)$.

8. Beräkna

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

för $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (xz, 0, y)$ sammansatt av skärningslinjerna av sfären $x^2+y^2+z^2 = 1$ med planen $x = 0$, $y = 0$ och $z = 0$. Kurvan passerar punkterna $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$ i nämnd ordning.

Bonusproblem (inget samarbete)

9. Vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (2x^2 + y^2, xy)$$

är inte konservativt, men blir det om man multiplicerar med en viss funktion $g(x)$. Bestäm den, och räkna ut den potential som då fås.

10. Visa

   (a) $\nabla(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{F} \times (\nabla \times \boldsymbol{G}) + \boldsymbol{G} \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F}$;

   (b) $\boldsymbol{F} \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \frac{\nabla(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F})}{2} - (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{F}$;

   (c) $(\boldsymbol{F} \times \nabla) \times \boldsymbol{F} = \frac{\nabla(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F})}{2} - \boldsymbol{F}(\nabla \cdot \boldsymbol{F})$.

11. Vilka värden kan kurvintegralen

$$\int_\Gamma (y - 2x^2y)\,\mathrm{d}x - (3x - xy^2)\,\mathrm{d}y$$

anta om Γ är en enkel sluten kurva som går moturs?