**Lösningsförslag till dugga 1a, ALA C 2009/2010**

---

1. *Egenvärden:* Beräknas genom att lösa en karaktäristiska ekvationen. I detta fall blir den

$$0 = \det\left(\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 15\lambda + 50,$$

som har lösningarna $\lambda_1 = 5$ och $\lambda_2 = 10$.

*Egenvektorer:* Egenrummet hörande till $\lambda_1 = 5$ beräknas genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 7-5 & 3 \\ 2 & 8-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Efter radreduktion får man att allmänna lösningen är

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

där $s$ är en fri variabel. En egenvektor hörande till $\lambda_1 = 5$ är t.ex. $[-3\ 2]^T$. På samma sätt räknar man fram att egenrummet hörande till $\lambda_2 = 10$ är $s[1\ 1]^T$ (där $s$ är en fri variabel). Så t.ex. är $[1\ 1]^T$ en egenvektor hörande till $\lambda_2 = 10$.

2. a) $\mathscr{B} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ är en bas för $\mathbb{P}_n$ så $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$.

   b) Nej, avbildningen är inte linjär. Om $\mathbf{p}(t)$ och $\mathbf{q}(t)$ är polynom i $\mathbb{P}_n$ så är

$$A(\mathbf{p}(t)+\mathbf{q}(t)) = \mathbf{p}(t)+\mathbf{q}(t)+1 \neq \mathbf{p}(t)+\mathbf{q}(t)+2 = A(\mathbf{p}(t))+A(\mathbf{q}(t)).$$

   Eftersom $A(\mathbf{p}(t) + \mathbf{q}(t)) \neq A(\mathbf{p}(t)) + A(\mathbf{q}(t))$ är $A$ inte linjär.

   c) Ja, avbildningen är linjär. Om $\mathbf{p}(t)$ och $\mathbf{q}(t)$ är polynom i $\mathbb{P}_n$ och $c$ är en skalär så gäller

$$A(\mathbf{p}(t) + \mathbf{q}(t)) = \mathbf{p}(0) + \mathbf{q}(0) = A(\mathbf{p}(t)) + A(\mathbf{q}(t)) \quad \text{och}$$

$$A(c\mathbf{p}(t)) = c\mathbf{p}(0) = cA(\mathbf{p}(0)).$$

   Villkoren för att $A$ skall vara linjär är alltså uppfyllda.

3. a) Ja, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ är en bas för $H$. Definitionsmässigt genererar $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ underrummet $H$ och man verifierar lätt att $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är linjärt oberoende (ingen av dem är en multipel av den andra).

b) Ja, $\mathbf{x}$ ligger i $H$. För att se det försöker vi lösa ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 14 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Efter radreduktion ser vi att systemet är lösbart och att $c_1 = 3$ och $c_2 = 4$ är en lösning. Alltså är

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2.$$