

Lösningförslag till gula dugga 1a, ALA C 2009/2010

1. *Eigenvärden:* Beräknas genom att lösa en karakteristiska ekvationen. I detta fall blir den

$$0 = \det \left(\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 - 11\lambda + 24,$$

som har lösningarna $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = 8$.

Eigenvektorer: Egenrummet hörande till $\lambda_1 = 3$ beräknas genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 5-3 & 3 \\ 2 & 6-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Efter radreduktion får man att allmänna lösningen är

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

där s är en fri variabel. En egenvektor hörande till $\lambda_1 = 3$ är t.ex. $[-3 \ 2]^T$. På samma sätt räknar man fram att egenrummet hörande till $\lambda_2 = 8$ är $s[1 \ 1]^T$ (där s är en fri variabel). Så t.ex. är $[1 \ 1]^T$ en egenvektor hörande till $\lambda_2 = 8$.

2. a) $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ är en bas för \mathbb{P}_n så $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$.
b) Nej, avbildningen är inte linjär. Om $\mathbf{p}(t)$ och $\mathbf{q}(t)$ är polynom i \mathbb{P}_n så är

$$A(\mathbf{p}(t) + \mathbf{q}(t)) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{q}(t) + 1 \neq \mathbf{p}(t) + \mathbf{q}(t) + 2 = A(\mathbf{p}(t)) + A(\mathbf{q}(t)).$$

Eftersom $A(\mathbf{p}(t) + \mathbf{q}(t)) \neq A(\mathbf{p}(t)) + A(\mathbf{q}(t))$ är A inte linjär.

- c) Ja, avbildningen är linjär. Om $\mathbf{p}(t)$ och $\mathbf{q}(t)$ är polynom i \mathbb{P}_n och c är en skalär så gäller

$$A(\mathbf{p}(t) + \mathbf{q}(t)) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{q}(t) = A(\mathbf{p}(t)) + A(\mathbf{q}(t)) \quad \text{och}$$

$$A(c\mathbf{p}(t)) = c\mathbf{p}(t) = cA(\mathbf{p}(t)).$$

Villkoren för att A skall vara linjär är alltså uppfyllda.

3. a) Ja, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ är en bas för H . Definitionsmässigt genererar \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 underrummet H och man verifierar lätt att \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 är linjärt oberoende (ingen av dem är en multipel av den andra).
- b) Nej, \mathbf{x} ligger inte i H . Ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

saknar lösning.