Lösningsförslag till gula dugga 1b, ALA C 2009/2010

---

1. $\lambda = 3$ är ett egenvärde eftersom

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Egenrummet hörande till egenvärdet $\lambda = 3$ beräknas genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 0 & 1 \\ 1 & 2-3 & 1 \\ 1 & 0 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Efter radreduktion ser man att allmänna lösningen är

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

där s är en fri variabel. Det sökta egenrummet är alltså $\text{Span}\{[1\ 2\ 1]^T\}$.

2. a) $\mathscr{B} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ är en bas för $\mathbb{P}_n$. Det är klart att $1, t, t^2, \dots, t^n$ genererar $\mathbb{P}_n$ och man verifierar, t.ex. genom att derivera, att $1, t, t^2, \dots, t^n$ är linjärt oberoende.

   b) Per definition är

$$\text{Nul}(T) = \{\mathbf{p}(t) \in \mathbb{P}_n;\ T(\mathbf{p}(t)) = 0\}.$$

Eftersom $T(\mathbf{p}(t)) = \mathbf{p}(0)$ i vårt fall är alltså $\text{Nul}(T) = \{\mathbf{p}(t) \in \mathbb{P}_n;\ \mathbf{p}(0) = 0\}$. Uttryckt i ord: nollrummet till T är alla polynom i $\mathbb{P}_n$ vars värde då $t = 0$ är 0. Ett godtyckligt polynom

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

har värdet 0 då $t = 0$ omm koefficienten $a_0 = 0$. Nollrummet till T är alltså alla polynom som kan skrivas på formen

$$a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n.$$

En bas för detta underrum är t.ex. $\{t, t^2, \dots, t^n\}$, så $\dim \text{Nul}(T) = n$.

3. a) Vi beräknar $\text{Rank}(B)$ genom att radreducera:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrisen B har alltså två pivotkolonner och därför är $\text{Rank}(B) = \dim \text{Col}(B) = 2$.

b) Ja, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ är en bas för $\text{Col}(B)$. $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är linjärt oberoende (eftersom ingen är en multipel av den andra). Alltså är $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ett två-dimensionellt underrum av $\text{Col}(B)$. Men vi vet från uppgift 3a att $\dim \text{Col}(B) = \text{Rank}(B) = 2$. Alltså måste $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \text{Col}(B)$ och vi drar slutsatsen att $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ är en bas för $\text{Col}(B)$.