

Lösningförslag till gula dugga 2a, ALA C 2009/2010

1. a) Vektorerna \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 är ortogonala eftersom $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = -2 + 6 - 4 = 0$ och alltså kan vi beräkna projektionen $\hat{\mathbf{u}}$ av \mathbf{u} på H med formeln

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 = \frac{28}{14} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{42}{21} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

- b) Avståndet mellan \mathbf{u} och H är längden av $\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}$, dvs. avståndet är

$$\|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\| = \left\| \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -6 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{6}.$$

2. a) Båglängdselementet är definitionsmässigt $ds = \|\mathbf{dr}/dt\| dt$. Eftersom

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \pi\sqrt{2} \cos(\pi t) \mathbf{i} + \pi \sin(\pi t) \mathbf{j} - \pi \sin(\pi t) \mathbf{k}$$

blir båglängdselementet

$$\begin{aligned} ds &= \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt \\ &= \sqrt{2\pi^2 \cos^2(\pi t) + \pi^2 \sin^2(\pi t) + \pi^2 \sin^2(\pi t)} dt = \pi\sqrt{2} dt. \end{aligned}$$

- b) Punkten $(0, 0, 2)$ svarar mot $t = 0$ och punkten $(0, 2, 0)$ svarar mot $t = 1$. Båglängden av kurvan ges då av

$$s = \int_0^1 \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt = \int_0^1 \pi\sqrt{2} dt = \pi\sqrt{2}.$$

3. a) Enligt sats 12.7:6 är $\nabla f(a, b)$ en normalvektor till nivåkurvan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = f(a, b)\}$ i punkten (a, b) . I vårt fall är $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$ så $\nabla f(1, 3) = (6, 1)$ är en normalvektor till \mathcal{C} i punkten $(1, 3)$.

- b) En punkt (x, y) ligger på tangentlinjen om vektorn $\mathbf{v}(x, y) = [x - 1, y - 3]^T$ är ortogonal mot normalvektorn. Punkterna på tangentlinjen uppfyller alltså

$$0 = \nabla f(1, 3) \cdot \mathbf{v}(x, y) = 6 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 3),$$

som kan skrivas om som

$$y = -6x + 9.$$