Lösningsförslag till vita dugga 2a, ALA C 2009/2010

---

1. a) Vektorerna $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonala eftersom $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 1-2+1 = 0$ och alltså kan vi beräkna projektionen $\hat{\mathbf{u}}$ av $\mathbf{u}$ på H med formeln

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 = \frac{8}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

b) Avståndet mellan $\mathbf{u}$ och H är längden av $\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}$, dvs. avståndet är

$$\|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\| = \| \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \| = \| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \| = \sqrt{2}.$$

2. a) Båglängdselementet är definitionsmässigt $ds = \|d\mathbf{r}/dt\|dt$. Eftersom

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cos(\pi t)\mathbf{i} + \frac{\pi}{2}\sin(\pi t)\mathbf{j} - \frac{\pi}{2}\sin(\pi t)\mathbf{k}$$

blir båglängdselementet

$$\begin{aligned} ds &= \|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\|\,dt \\ &= \sqrt{\frac{\pi^2}{2}\cos^2(\pi t) + \frac{\pi^2}{4}\sin^2(\pi t) + \frac{\pi^2}{4}\sin^2(\pi t)}\,dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,dt. \end{aligned}$$

b) Punkten $(0,0,1)$ svarar mot $t = 0$ och punkten $(0,1,0)$ svarar mot $t = 1$. Båglängden av kurvan ges då av

$$s = \int_0^1 \|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\|\,dt = \int_0^1 \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

3. a) Enligt sats 12.7:6 är $\nabla f(a,b)$ en normalvektor till nivåkurvan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; f(x,y) = f(a,b)\}$ i punkten (a,b). I vårt fall är $\nabla f(x,y) = (y,x)$ så $\nabla f(1,2) = (2,1)$ är en normalvektor till $\mathcal{C}$ i punkten $(1,2)$.

b) En punkt (x, y) ligger på tangentlinjen omm vektorn $\mathbf{v}(x, y) = [x - 1,\ y - 2]^T$ är ortogonal mot normalvektorn. Punkterna på tangentlinjen uppfyller alltså

$$0 = \nabla f(1, 2) \bullet \mathbf{v}(x, y) = 2 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 2),$$

som kan skrivas om som

$$y = -2x + 4.$$