

Lösningförslag till gula dugga 2b, ALA C 2009/2010

1. a) Ortogonal komplementet till L är definitionsmässigt mängden av alla vektorer $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ sådana att $0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = x_1 + 2x_2 + 3x_3$. Denna linjära ekvation får två fria variabler, t.ex. $x_2 = s$ och $x_3 = t$, och allmänna lösningen blir då

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2s - 3t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alltså blir

$$H = L^\perp = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

- b) Låt \mathbf{u}_1 vara projektionen av \mathbf{u} på L , dvs.

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = \frac{7}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Specialt ligger \mathbf{u}_1 i L . Låt sedan $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = [3/2, 0, -1/2]^T$. Vi har nu att $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v} = 3/2 - 3/2 = 0$ så \mathbf{u}_2 ligger i H . Alltså är

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

den önskade uppdelningen.

2. a) En parametrisering av kurvan \mathcal{C} med $t = x$ som parameter är

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{\sqrt{5}}{3}t^{3/2}\mathbf{j}, \quad t \geq 0.$$

- b) Båglängdselementet är $ds = \|\mathbf{dr}/dt\| dt = \|\mathbf{i} + (\sqrt{5}/2)\sqrt{t}\mathbf{j}\| dt = \sqrt{1 + 5t/4} dt$. Vidare, eftersom punkten $(0, 0)$ svarar mot $t = 0$ och punkten $(1, \sqrt{5}/3)$ svarar mot $t = 1$ blir längden av kurvan mellan dessa två punkter

$$s = \int_0^1 \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 5t/4} dt = \frac{19}{5}.$$

3. a) Enligt sats 12.7:7 är $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}$. I vårt fall är $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$, så $\nabla f(\mathbf{a}) = (2, 4, 6)$. Alltså är

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}.$$

- b) Vi vet från avsnitt 12.7 i Adams att gradienten anger den riktning i vilken en funktion växer mest. Det räcker alltså att beräkna $\nabla f(\mathbf{a})$. Detta blir enligt ovan $(2, 4, 6)$. Om man vill ha enhetsvektorn i samma riktning är den

$$\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$