Lösningsförslag till vita dugga 2b, ALA C 2009/2010

---

1. a) Ortogonala komplementet till L är definitionsmässigt mängden av alla vektorer $\mathbf{x} = [x_1,\ x_2,\ x_3]^T$ sådana att $0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = x_1 + x_2 + x_3$. Denna linjära ekvation får två fria variabler, t.ex. $x_2 = s$ och $x_3 = t$, och allmänna lösningen blir då

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alltså blir

$$H = L^{\perp} = \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

b) Låt $\mathbf{u}_1$ vara projektionen av $\mathbf{u}$ på L, dvs.

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} = \frac{6}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Speciallt ligger $\mathbf{u}_1$ i L. Låt sedan $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = [-1, 0, 1]^T$. Vi har nu att $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v} = -1 + 1 = 0$ så $\mathbf{u}_2$ ligger i H. Alltså är

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

den önskade uppdelningen.

2. a) En parametrisering av kurvan $\mathcal{C}$ med $t = x$ som parameter är

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{3}}t^{3/2}\mathbf{j}, \quad t \geq 0.$$

b) Båglängdselementet är $ds = \|d\mathbf{r}/dt\|\,dt = \|\mathbf{i} + \sqrt{3}\sqrt{t}\mathbf{j}\|\,dt = \sqrt{1+3t}\,dt$. Vidare, eftersom punkten $(0,0)$ svarar mot $t = 0$ och punkten $(1, 2/\sqrt{3})$ svarar mot $t = 1$ blir längden av kurvan mellan dessa två punkter

$$s = \int_0^1 \|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\|\,dt = \int_0^1 \sqrt{1+3t}\,dt = \frac{14}{9}.$$

3. a) Enligt sats 12.7:7 är $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{u}$. I vårt fall är $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$, så $\nabla f(\mathbf{a}) = (2, 2, 2)$. Alltså är

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{u} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

b) Vi vet från avsnitt 12.7 i Adams att gradienten anger den riktning i vilken en funktion växer mest. Det räcker alltså att beräkna $\nabla f(\mathbf{a})$. Detta blir enligt ovan $(2, 2, 2)$. Om man vill ha enhetsvektorn i samma riktning är den

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$