Lösningsförslag till övningsdugga 1, ALA C 2009/2010

---

1. a) Vektorn $\mathbf{x}$ är uppenbarligen nollskild så det vi skall kolla är att $\mathbf{x}$ uppfyller ekvationen $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ för någon skalär λ. Vi räknar:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -9 \\ 4 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = -2\mathbf{x}.$$

Alltså är $\mathbf{x}$ en egenvektor och tillhörande egenvärde är -2.

b) Egenrummet hörande till egenvärdet -2 är per definition underrummet $H = \{\mathbf{u};\ A\mathbf{u} = -2\mathbf{u}\}$. Annorlunda uttryckt, det aktuella egenrummet är nollrummet till matrisen

$$A - (-2)I = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -9 \\ 4 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nollrummet till denna matris beräknas lätt med radreduktion. Man får *två* fria variabler; egenrummet är alltså 2-dimensionellt! Man ser också lätt att H kan skrivas

$$H = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

2. Definiera matrisen

$$B = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Det finns (minst) två sätt att lösa uppgiften. Antingen kan vi observera att H nu är detsamma som $\operatorname{Col}(B)$ och bestämma en bas för $\operatorname{Col}(B)$ på standardsättet.

Vi kan också resonera på följande vis: Vi börjar med att undersöka om $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ är linjärt beroende, dvs. om vi kan hitta en nollskild vektor $\mathbf{c} = [c_1\, c_2\, c_3]^T$ sådan att $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$. Detta är detsamma som att hitta en icke-trivial lösning till den homogena ekvationen $B\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Vi löser ekvationen med radreduktion och ser att t.ex. $[3\,1\;-2]$ är en lösning. Alltså *är* $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ linjärt beroende. Dimensionen för H kan alltså inte vara större än 2! Å andra sidan är det uppenbart att t.ex. $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ är linjärt oberoende (ingen av dessa vektorer kan skrivas som en skalär gånger den andra vektorn). Slutsatsen är att H är genererat av (t.ex.) $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ samt att $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ är linjärt oberoende. Alltså är $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ en bas för H!

3. a) Låt $g_1 = 1 + t$, $g_2 = t + t^2$ och $g_3 = 1 + t^2$. Vi skall visa att vektorerna g_1, g_2 och g_3 är linjärt oberoende och att de genererar hela $\mathbb{P}_2$.

Linjärt oberoende: Vi skall alltså visa att *om* $a_1g_1+a_2g_2+a_3g_3 = 0$ så måste $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Antag alltså att $a_1g_1+a_2g_2+a_3g_3 = 0$. Då är

$$\begin{aligned} 0 = a_1g_1 + a_2g_2 + a_3g_3 &= a_1(1 + t) + a_2(t + t^2) + a_3(1 + t^2) \\ &= a_1 + a_3 + (a_1 + a_2)t + (a_2 + a_3)t^2. \end{aligned}$$

T.ex. eftersom $\mathscr{F}$ är en bas måste nu $a_1 + a_3 = 0$, $a_1 + a_2 = 0$ och $a_2 + a_3 = 0$. Detta betyder att

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Beteckna matrisen i ekvationen ovan med P. Man beräknar lätt att $\det P = 2$. Alltså har ekvationen (1) bara den triviala lösningen $\mathbf{0}$ och följdaktligen är g_1, g_2 och g_3 linjärt oberoende.

Genererar: Faktum är att vi redan vet att g_1, g_2 och g_3 genererar $\mathbb{P}_2$: Eftersom g_1, g_2 och g_3 är linjärt oberoende genererar de ett underrum av $\mathbb{P}_2$ av dimension 3. Men $\mathbb{P}_2$ har själv dimension 3 så det enda 3-dimensionella underrummet är $\mathbb{P}_2$ självt!

Om man känner sig osäker på detta resonemang kan man kolla direkt g_1, g_2 och g_3 genererar $\mathbb{P}_2$ på följande vis: Vi vill visa att ett godtyckligt polynom $p = b_1 + b_2t + b_3t^2$ i $\mathbb{P}_2$ kan skrivas som en linjärkombination av g_1, g_2 och g_3, dvs. att det finns skalärer c_1, c_2 och c_3 så att

$$\begin{aligned} b_1 + b_2t + b_3t^2 &= c_1g_1 + c_2g_2 + c_3g_3 \\ &= c_1(1 + t) + c_2(t + t^2) + c_3(1 + t^2) \\ &= c_1 + c_3 + (c_1 + c_2)t + (c_2 + c_3)t^2. \end{aligned}$$

Detta kan skrivas som

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Matrisen P dyker upp igen! Vi har att $\det P = 2 \neq 0$ så vi kan invertera P och hitta en lösning $[c_1\, c_2\, c_3]^T = P^{-1}[b_1\, b_2\, b_3]^T$ till ekvationen (2).

b) Faktum är att basbytesmatrisen $P_{\mathscr{F} \leftarrow \mathscr{G}}$ vi söker är matrisen P ovan: Vi vet att första kolonnen i basbytesmatrisen $P_{\mathscr{F} \leftarrow \mathscr{G}}$ är koordinatvektorn, $[g_1]_{\mathscr{F}}$, för g_1 relativt basen $\mathscr{F}$. Men $g_1 = 1 + t$ så $[g_1]_{\mathscr{F}} = [1\ 1\ 0]^T$. På samma sätt är andra respektive tredje kolonnen i $P_{\mathscr{F} \leftarrow \mathscr{G}}$ koordinatvektorerna $[g_2]_{\mathscr{F}} = [0\ 1\ 1]^T$ och $[g_3]_{\mathscr{F}} = [1\ 0\ 1]^T$.