**MATEMATIK**
Chalmers tekniska högskola
Tentamen 2010-08-28, kl. 14.00-18.00

# TMV036 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del C

Telefonvakt: Adam Andersson, telefon: 0703-088304
Hjälpmedel: Inga, bara papper och penna.

---

För full poäng krävs fullständiga lösningar. Strukturera dina lösningar väl, skriv tydligt och motivera dina påståenden!

Betygsgränser: 20–29 p. ger betyget 3, 30–39 p. ger betyget 4, 40–50 p. ger betyget 5.

Lösningar läggs ut på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället.

Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1. Beräkna volymen av området som ligger ovanför kvadraten $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ i $xy$-planet och under grafen till funktionen $f(x, y) = 2 - x^2 - y^4$. (5p)

2. Bestäm den lösning till systemet av differentialekvationer
$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t),$$
som uppfyller $\mathbf{x}(0) = [3\ 3]^T$. (6p)

3. Låt $f(x, y, z)$ vara funktionen $f(x, y, z) = x \sin(y^2 - z^3)$ och låt $\mathbf{a}$ vara punkten $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$.

   a) Med utgångspunkt i $\mathbf{a}$, i vilken riktning växer $f$ fortast? (1p)

   b) Låt $\mathbf{u}$ vara enhetsvektorn
   $$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$
   Beräkna riktnings derivatan av $f$ i punkten $\mathbf{a}$ i riktningen $\mathbf{u}$, dvs. beräkna $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a})$. (2p)

   c) Skriv upp ekvationen för tangentplanet till nivåytan $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2; x \sin(y^2 - z^3) = 0\}$ i punkten $\mathbf{a}$. (3p)

4. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara området som i polära koordinater definieras av $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$. Beräkna dubbelintegralen (6p)

$$\iint_D \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dxdy.$$

5. Låt $A$ vara matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

   a) Skriv upp karaktäristiska ekvationen för $A$. (2p)

   b) Beräkna alla egenvärden samt tre linjärt oberoende egenvektorer till $A$. (4p)

6. Beräkna minsta-kvadratlösningen till ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(5p)

7. Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x,y) = 2x^2 + x(y^2 - 1)$ på området $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. (6p)

8. Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ vara vektorfältet $\mathbf{F} = \big(y/(x^2+y^2), -x/(x^2+y^2)\big)$ och låt $C$ vara kurvan som startar i punkten $(-1,1)$ och slutar i $(1,1)$ och däremella är övre delen av cirkeln som är centrerad i $(0,1)$ och har radie 1. Beräkna kurvintegralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(5p)

9. Bevisa att en $n \times n$-matris $M$ är diagonaliserbar om och endast om $M$ har $n$ stycken linjärt oberoende egenvärden. (5p)

   (Att en matris $M$ är diagonaliserbar betyder att den kan skrivas $M = PDP^{-1}$, där $D$ är en diagonalmatris.)

Liten formelsamling:

- $(\tan\theta)' = 1 + \tan^2\theta$,
- $(\arctan\theta)' = 1/(1+\theta^2)$.

Lycka till!