Lösningsförslag, tenta: 2010-08-28

Analys och linjär algebra K Kf Bt, del C

---

1. Eftersom $x^2 + y^4 \leq 2$ om $-1 \leq x \leq 1$ och $-1 \leq y \leq 1$ så ligger grafen till $f(x, y) = 2 - x^2 - y^4$ ovanför kvadraten Q i xy-planet. Enligt tolkningen av dubbelintegral kan den önskade volymen beräknas som

$$\begin{aligned}
\iint_Q f(x,y)\,dxdy &= \int_{y=-1}^{1}\int_{x=-1}^{1} 2 - x^2 - y^4\,dxdy \\
&= \int_{y=-1}^{1} [2x - x^3/3 - xy^4]_{x=-1}^{1}\,dy \\
&= \int_{y=-1}^{1} 10/3 - 2y^4\,dy \\
&= [10y/3 - 2y^5/5]_{-1}^{1} = 88/15.
\end{aligned}$$

2. Egenvärden och tillhörande egenvektorer till matrisen

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

beräknas på standardsätt (se även uppg. 5). Man får

$$\lambda_1 = 3, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = -3, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer blir alltså

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}.$$

Konstanterna C_1 och C_2 bestäms av begynnelsevillkoret $\mathbf{x}(0) = [3\ 3]^T$. Det ger ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix},$$

som har lösning $C_1 = 1$, $C_2 = 2$. Lösningen till begynnelsevärdesproblemet är alltså

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}.$$

3. a) Funktionen växer fortast i gradientens riktning. Gradienten av f är

$$\begin{aligned} \nabla f &= (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z) \\ &= (\sin(y^2 - z^3), 2xy\cos(y^2 - z^3), -3xz\cos(y^2 - z^3)). \end{aligned}$$

I punkten $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ blir alltså gradienten $\nabla f(\mathbf{a}) = (0, 2, -3)$. Den normaliserade riktning i vilken f växer fortast är $(0, 2, -3)/\sqrt{13}$.

b) Eftersom $\mathbf{u}$ har längd 1 kan den sökta riktningsderivatan beräknas enligt

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = 0 \cdot 2/3 + 2 \cdot 2/3 - 3 \cdot 1/3 = 1/3.$$

c) Ytan Y är nivåytan till f i punkten $\mathbf{a}$ så $\nabla f(\mathbf{a})$ är vinkelrät mot det sökta tangentplanet. Ekvationen för tangentplanet kan därför skrivas

$$0 = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0 \cdot (x - 1) + 2(y - 1) - 3(z - 1),$$

som kan förenklas till $2y - 3z = -1$.

4. Vi byter till polära koordinater:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta &= \arctan(y/x). \end{aligned}$$

Då är $y^2/x^2 = \tan\theta$ och $dxdy = rdrd\theta$. Så dubbelintegralen blir

$$\begin{aligned} \iint_D \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dxdy &= \int_{r=1}^{2} \int_{\theta=0}^{\pi/4} (1 + \tan^2\theta) r dr d\theta \\ &= \int_{r=1}^{2} \big[r \cdot \tan\theta\big]_{\theta=0}^{\pi/4} dr \\ &= \int_{r=1}^{2} r dr = \big[r^2/2\big]_{r=1}^{2} = 3/2. \end{aligned}$$

5. a) Karaktäristiska ekvationen för A är $0 = \det(A - \lambda I)$, som i vårt fall blir

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 3 & -2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-1-\lambda)\big((3-\lambda)(-2-\lambda) + 6\big) = -\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1). \end{aligned}$$

b) Egenvärdena till A fås genom att lösa den karaktäristiska ekvationen och är alltså $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$. Egenrummet hörande till λ_i beräknas genom att lösa det linjära ekvationssystemet $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Efter radreduktion får vi att egenrummen hörande till $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ och $\lambda_3 = 1$ respektive är

$$\text{Span}\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}, \quad \text{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\}, \quad \text{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}.$$

Eftersom egenvektorer hörande till olika egenvärden är linjärt oberoende är t.ex.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tre stycken linjärt oberoende egenvektorer till A.

6. Låt

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Minsta-kvadratlösningen till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösningen till *normalekvationerna*,

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}. \tag{1}$$

Vi räknar:

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Normalekvationerna (1) blir alltså

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \end{bmatrix},$$

som löses t.ex. med radreduktion. Lösningen blir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

7. Vi börjar med att leta efter kritiska punkter till f i D, dvs. punkter i vilka $\nabla f = \mathbf{0}$. Vi har att

$$\nabla f = (4x + y^2 - 1, 2xy),$$

så vi skall lösa ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 4x + y^2 - 1 &= 0 \\ 2xy &= 0. \end{aligned}$$

Den andra ekvationen betyder att $x = 0$ eller $y = 0$. Om $x = 0$ säger den första ekvationen att $y = \pm 1$, vilket ger punkterna $(0, \pm 1)$ som ligger på randen av D; randpunkter bryr vi oss inte om ännu. Om däremot $y = 0$ säger den första ekvationen att $x = 1/4$, vilket ger oss den kritiska punkten $(1/4, 0)$.

Vi undersöker nu randen till D. Randen parametriseras av $(\cos t, \sin t)$, $0 \le t < 2\pi$, så vi söker kritiska punkter till

$$g(t) = f(\cos t, \sin t) = 2\cos^2 t + \cos t(\sin^2 t - 1) = 2\cos^2 t - \cos^3 t,$$

på intervallet $t \in [0, 2\pi)$. I sådana punkter är $g'(t) = 0$, dvs.

$$0 = -4\cos t \sin t + 3\cos^2 t \sin t = -\cos t \sin t(4 - 3\cos t).$$

Alltså måste $\cos t = 0$ (dvs. $t = \pi/2, 3\pi/4$) eller $\sin t = 0$ (dvs. $t = 0, \pi$) eller $\cos t = 4/3$, som saknar lösning. De kritiska randpunkterna blir

$$\begin{aligned}
(\cos 0, \sin 0) &= (1, 0), \\
(\cos \pi/2, \sin \pi/2) &= (0, 1), \\
(\cos \pi, \sin \pi) &= (-1, 0), \\
(\cos 3\pi/4, \sin 3\pi/4) &= (0, -1).
\end{aligned}$$

Tillsammans med den inre kritiska punkten $(1/4, 0)$ har vi alltså fem kandidater till max- resp. minpunkter:

$$\begin{aligned}
f(1/4, 0) &= -1/8, \\
f(1, 0) &= 1, \\
f(0, 1) &= 0, \\
f(-1, 0) &= 3, \\
f(0, -1) &= 0.
\end{aligned}$$

Vi ser att största värdet är 3 och att minsta värdet är $-1/8$.

8. Låt γ vara linjestycket som börjar i $(1, 1)$ och slutar i $(-1, 1)$. Då är $C + \gamma$ en kurva, genomlöpt medurs, som innesluter ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Enligt Greens formel gäller

$$\begin{aligned}
\int_{C+\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= -\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dxdy \\
&= -\iint_D \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{-x}{x^2 + y^2}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{x^2 + y^2}\Big)\, dxdy \\
&= \ldots \text{ räkna } \ldots = 0.
\end{aligned}$$

Alltså är

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{2}$$

Kurvan $-\gamma$ kan parametriseras som $x = t$, $y = 1$, där $-1 \leq t \leq 1$. Sista integralen i (2) kan då beräknas enligt

$$\int_{-\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^{1} (F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt})\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2+1}\, dt = \big[\arctan t\big]_{-1}^{1} = \pi/2.$$

9. Se beviset av sats 5.3:5 i Lay.