Lösningsförslag, tentamen 2011-01-11

Analys och linjär algebra K Kf Bt, del C

---

1. Vi räknar med upprepar integration:

$$\begin{aligned}\iint_D xe^{xy}\,dxdy &= \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{1} xe^{xy}\,dydx = \int_{x=0}^{2}\Big[e^{xy}\Big]_{y=0}^{1}dx = \int_{x=0}^{2} e^x - 1\,dx \\ &= \Big[e^x - x\Big]_0^2 = e^2 - 3.\end{aligned}$$

2. a) Efterson två linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^2$ automatiskt är en bas räcker det att kolla att $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ är linjärt oberoende. Vi skall alltså kolla att den enda lösningen till $x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ är $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Vi betraktar alltså ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

och efter radreduktion ser vi att den enda lösningen är $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

b) Vi söker ett talpar (x_1, x_2) så att $\mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2$, dvs. vi skall lösa ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Efter radreduktion får vi att $(x_1, x_2) = (-1/5, 3/5)$, som är den sökta koordinatvektorn för $\mathbf{v}$ relativt basen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

3. a) Temperaturen växer mest i gradientens riktning. Vi räknar:

$$\nabla T(2, \ln 3) = (\frac{\partial T}{\partial x}(2, \ln 3), \frac{\partial T}{\partial y}(2, \ln 3)) = (3, 6).$$

Den (normerade) riktning i vilken T växer mest är alltså $(1, 2)/\sqrt{5}$.

b) Gradienten $\nabla T(2, \ln 3) = (3, 6)$ är vinkelrät mot nivåkurvan C. Tangenten till C i $(2, \ln 3)$ är alltså vinkelrät mot $(3, 6) = 3(1, 2)$, vilket betyder att tangenten är parallell med $(2, -1)$ och alltså har lutning $-1/2$. Tangentens ekvation är alltså

$$\frac{y - \ln 3}{x - 2} = -1/2,$$

som förenklas till $y = -x/2 + 1 + \ln 3$.

4. a) Egenvärden beräknas med karaktäristiska ekvationen:

$$0 = \det A - \lambda I = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5,$$

som har lösningarna $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Egenvektorer hörande till λ_i beräknas genom att lösa ekvationssystemet $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. I vårt fall skall vi alltså lösa de två ekvationssystemen

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Dessa löses med radreduktion och man får $\mathbf{x}_1 = (a,\ -a)^T$ och $\mathbf{x}_2 = (3b,\ b)^T$, som är egenvektorerna hörande till $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 5$ respektive (a och b är fria variabler).

b) Allmänna lösningen till $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ kan skrivas upp direkt m.h.a. egenvärden och egenvektorer:

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t},$$

där C_1 och C_2 är konstanter.

5. Vi byter till cylinderkoordinater (r, θ, z) definierade genom

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{cases}.$$

I de nya koordinaterna beskrivs området D som $D = \{(r,\theta,z);\ 0 \le r \le z,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 1\}$ och vi har att

$$\begin{aligned} dxdydz &= \left| \det \begin{bmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta & \partial x/\partial z \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta & \partial y/\partial z \\ \partial z/\partial r & \partial z/\partial\theta & \partial z/\partial z \end{bmatrix} \right| drd\theta dz \\ &= \left| \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| drd\theta dz = rdrd\theta dz. \end{aligned}$$

Alltså får vi

$$\begin{aligned} \iiint_D (x^2 + y^2) dxdydz &= \int_{z=0}^{1} \int_{r=0}^{z} \int_{\theta=0}^{2\pi} r^2\, rd\theta drdz = 2\pi \int_{z=0}^{1} \int_{r=0}^{z} r^3\, drdz \\ &= 2\pi \int_{z=0}^{1} z^4/4\, dz = 2\pi/20 = \pi/10. \end{aligned}$$

6. Låt $\mathbf{u}_1 = (1,0,1)^T$ och $\mathbf{u}_2 = (1,1,-1)^T$ vara vektorerna som genererar H. Eftersom $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ är ortogonala (deras skalärprodukt är 0) kan ortogonalprojektionen, $P(\mathbf{v})$, av en vektor $\mathbf{v}$ på H beräknas med formeln

$$P(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2. \tag{1}$$

a) Vi låter $\mathbf{v} = (1,1,1)^T$ i formeln (1) och får

$$P(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}) = \frac{2}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}4\\1\\2\end{bmatrix}.$$

b) Vi låter $\mathbf{v} = (x_1,x_2,x_3)^T$ i formeln (1) och får

$$P(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}) = \frac{x_1+x_3}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \frac{x_1+x_2-x_3}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(5x_1+2x_2+x_3)/6\\(x_1+x_2-x_3)/3\\(x_1-2x_2+5x_3)/6\end{bmatrix}.$$

c) Vi skriver uttrycket i uppgift b) som en matrismultiplikation:

$$P(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}(5x_1+2x_2+x_3)/6\\(x_1+x_2-x_3)/3\\(x_1-2x_2+5x_3)/6\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}5&2&1\\2&2&-2\\1&-2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

och vi kan direkt läsa av matrisen för projektionen P som

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix}5&2&1\\2&2&-2\\1&-2&5\end{bmatrix}.$$

7. a) Extrempunkter finns där $\mathbf{0} = \nabla f = \big(\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y\big)$. Vi räknar:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cdots = y^2\frac{3-x^2-2xy}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cdots = x^2\frac{3-y^2-2xy}{(x+y)^2}.$$

Eftersom x och y är $\neq 0$ i området D betyder $\mathbf{0} = \nabla f$ att ekvationerna

$$0 = 3 - x^2 - 2xy, \tag{2}$$

$$0 = 3 - y^2 - 2xy \tag{3}$$

skall vara uppfyllda. Subtraktion av ekvation (3) från ekvation (2) ger att $-x^2 + y^2 = 0$, dvs. $x = \pm y$. Då x och y är > 0 i D måste $x = y > 0$. Insättning av $x = y$ i ekvation (3) ger att $0 = 3 - 3y^2$, så att $y = 1$ (då $y > 0$ i D). Alltså är $x = y = 1$, och den enda extrempunkten i området D är $\mathbf{a} = (1,1)$.

b) Vi räknar:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\big(y^2 \frac{3 - x^2 - 2xy}{(x+y)^2}\big) = \cdots = -2y^2 \frac{y^2+3}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\big(x^2 \frac{3 - y^2 - 2xy}{(x+y)^2}\big) = \cdots = -2x^2 \frac{x^2+3}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\big(x^2 \frac{3 - y^2 - 2xy}{(x+y)^2}\big) = \cdots = 2xy \frac{3 - x^2 - y^2 - 3xy}{(x+y)^3}.$$

I punkten $\mathbf{a} = (1,1)$ blir Hessianen då

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Vi beräknar egenvärdena till Hessianen i punkten $\mathbf{a} = (1,1)$ m.h.a. den karakteristiska ekvationen:

$$0 = (-1-\lambda)^2 - 1/4 = \lambda^2 + 2\lambda + 3/4.$$

Lösningarna blir $\lambda = -3/2, -1/2$, som båda är negativa. Hessianen i extrempunkten $\mathbf{a} = (1,1)$ är alltså negativt definit och $\mathbf{a}$ måste vara en lokal maxpunkt.

8. Γ är övre delen av cirkeln med radie 2 centrerad i origo; Γ startar i $(2,0)$ och slutar i $(-2,0)$. Vi sluter Γ genom att lägga till linjestycket, γ, som börjar i $(-2,0)$ och slutar i $(2,0)$. Då är $\Gamma + \gamma$ en kurva, genomlöpt motsols, som innesluter området $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$. Enligt Greens sats gäller

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma+\gamma} (-y^3)dx + (x^3 + e^{y^2})dy &= \iint_D \big(\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + e^{y^2}) - \frac{\partial}{\partial y}(-y^3)\big)\, dxdy \qquad (4) \\ &= 3 \iint_D x^2 + y^2\, dxdy. \end{aligned}$$

Den sista dubbelintegralen beräknas enkelt t.ex. genom att byta till polära koordinater, och man får

$$3 \iint_D x^2 + y^2\, dxdy = 3 \int_{r=0}^{2} \int_{\theta=0}^{\pi} r^3 d\theta dr = 3\pi \int_{r=0}^{2} r^3 dr = 12\pi. \qquad (5)$$

Av (4) och (5) följer att den sökta kurvintegralen är

$$\int_\Gamma (-y^3)dx + (x^3 + e^{y^2})dy = 12\pi - \int_\gamma (-y^3)dx + (x^3 + e^{y^2})dy.$$

Eftersom y och dy är 0 på γ blir integralen på höger sida 0. Den sökta kurvintegralen är alltså 12π.

9. Se beviset av sats 6.2:4 i Lay.