MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen 2011-01-11, kl. 14.00-18.00

TMV036 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del C

Telefonvakt: Richard Lärkäng, telefon: 0703-088304
Hjälpmedel: Inga, bara papper och penna.

För full poäng krävs fullständiga lösningar. Strukturera dina lösningar väl, skriv tydligt och motivera dina påståenden!

Betygsgränser: 20–29 p. ger betyget 3, 30–39 p. ger betyget 4, 40–50 p. ger betyget 5.

Lösningar läggs ut på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället.

Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1. Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D xe^{xy}\, dxdy,$$
där D är området $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$. (5p)

2. Låt $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{v}$ vara vektorerna
$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
   a) Verifiera att $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ är en bas för $\mathbb{R}^2$. (3p)
   b) Beräkna koordinatvektorn för $\mathbf{v}$ relativt basen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. (3p)

3. Temperaturen i xy-planet beskrivs av funktionen $T(x, y) = xe^y$.
   a) Om du står i punkten $(2, \ln 3)$, i vilken riktning växer temperaturen mest? (2p)
   b) Låt C vara nivåkurvan till T genom punkten $(2, \ln 3)$, dvs. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xe^y = 6\}$. Skriv upp ekvationen för tangenten till C i punkten $(2, \ln 3)$. (3p)

4. Låt A vara matrisen
$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$
   a) Beräkna egenvärden och tillhörande egenvektorer till matrisen A. (3p)
   b) Vad är allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$? (3p)

5. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_D (x^2 + y^2)\, dxdydz,$$

där D är området $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$. (6p)
(Tips: Byt till cylinderkoordinater, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$.)

6. Låt H vara det linjära underrummet (av $\mathbb{R}^3$) genererat av vektorerna $(1, 0, 1)^T$ och $(1, 1, -1)^T$.

   a) Beräkna ortogonalprojektionen av vektorn $(1, 1, 1)^T$ på underrummet H. (2p)

   b) Beräkna ortogonalprojektionen av vektorn $(x_1, x_2, x_3)^T$ på underrummet H. (2p)

   c) Låt $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen definierad som ortogonalprojektion på underrummet H. Beräkna matrisen för P (relativt standardbasen för $\mathbb{R}^3$). (2p)

7. Funktionen $f(x, y) = (3xy - x^2y^2)/(x + y)$ har en extrempunkt, **a**, i området $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y > 0\}$.

   a) Bestäm extrempunkten **a**. (3p)

   b) Beräkna Hessianen av f i punkten **a**, dvs. beräkna

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

   i punkten **a**. (2p)

   c) Avgör om f har ett lokalt max, lokalt min eller en sadelpunkt i **a**. (1p)

8. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma (-y^3)dx + (x^3 + e^{y^2})dy,$$

där Γ är halvcirkeln $(2\cos t, 2\sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$. (5p)
(Tips: Slut kurvan på lämpligt sätt och använd Greens sats.)

9. Låt $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vara parvis ortogonala vektorer i $\mathbb{R}^n$. Visa att $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ är linjärt oberoende. (5p)

Lycka till!