MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen 2010-03-05, kl. 8.30–12.30

TMV036 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del C

Tentamensvakt: Håkan Samuelsson
Hjälpmedel: Inga, bara papper och penna.

För full poäng krävs fullständiga lösningar. Strukturera dina lösningar väl, skriv tydligt och motivera dina påståenden!

Betygsgränser: 20–29 p. ger betyget 3, 30–39 p. ger betyget 4, 40–50 p. ger betyget 5.

Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället.
Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1. Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D xy\,dxdy,$$
där $D \subset \mathbb{R}^2$ är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(0,3)$. (5p)

2. Låt $f(x,y) = \sqrt{x^2+3y}$ vara definierad för $x > 0$, $y > 0$.
   a) Linearisera f i punkten $(1,1)$, dvs. skriv upp ekvationen för tangentplanet till grafen av f i punkten $(1,1,2)$. (3p)
   b) Beräkna $\sqrt{3} = f(3/4, 13/16)$ approximativt. (3p)

3. Låt A vara matrisen nedan. Diagonalisera A, dvs. skriv A på formen $A = PDP^{-1}$, där P är inverterbar och D är en diagonalmatris. (6p)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

4. En kropp i rummet upptar området
$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$$
Kroppen har en varierande densitet given av $\delta(x,y,z) = 1 + z$ (gram/volymsenhet). Beräkna kroppens massa. (5p)

V.G. vänd $\hookrightarrow$

5. Låt $f(x, y)$ vara funktionen $f(x, y) = (x + y)e^{-x^2-y^2}$ och låt D vara området $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

   a) Vi kan vara säkra på att f har ett största och ett minsta värde i D. Varför? (2p)

   b) Bestäm största värdet av f i D. (3p)

6. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y^2, z^3)$.

   a) Avgör om $\mathbf{F}$ är konservativt eller ej. Motivera ditt svar! (3p)

   b) Låt $\mathcal{C}$ vara kurvan given på parameterform av $\mathbf{r}(t) =$ $= (-\cos t, -\cos t, \sqrt{2}\sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$. Beräkna kurvintegralen (3p)

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

7. Låt A vara matrisen från uppgift 3.

   a) Hitta allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$. (3p)

   b) Skissa några "typiska" trajektorier. (Motivering behövs ej.) (1p)

   c) Skissa vektorfältet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definierat av $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. (Motivering behövs ej.) (1p)

8. Låt $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{b}$ vara vektorerna nedan och låt M vara matrisen $M = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]$.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

   a) Beräkna projektionen, $\hat{\mathbf{b}}$, av $\mathbf{b}$ på kolonnrummet till M. (2p)

   b) Motivera varför ekvationssystemet $M\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$ har lösning. ($\hat{\mathbf{b}}$ är projektionen av $\mathbf{b}$ på $\operatorname{Col} M$.) (2p)

   c) Bestäm $\mathbf{x}$ så att $\|M\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ blir minimal. (2p)

9. Låt B vara en $m \times n$-matris. Visa att $(\operatorname{Col} B)^{\perp} = \operatorname{Nul} B^T$. (6p)

Lycka till!
/Håkan Samuelsson