**MATEMATIK**
Chalmers tekniska högskola
Tentamen 2010-03-13, kl. 8.30–12.30

# TMV036 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del C

Telefonvakt: Magnus Goffeng, telefon: 0703-08 83 04
Hjälpmedel: Inga, bara papper och penna.

---

För full poäng krävs fullständiga lösningar. Strukturera dina lösningar väl, skriv tydligt och motivera dina påståenden!

Betygsgränser: 20–29 p. ger betyget 3, 30–39 p. ger betyget 4, 40–50 p. ger betyget 5.

Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället.
Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1. Låt $R \subset \mathbb{R}^3$ vara rätblocket $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\}$. Beräkna trippelintegralen (5p)
$$\iiint_R x^3 y^2 z\, dxdydz.$$

2. Låt $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ och $\mathbf{y}$ vara vektorerna
$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
   a) Verifiera att $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ är en bas för $\mathbb{R}^2$. (2p)
   b) Beräkna koordinatvektorn för $\mathbf{y}$ i basen $\mathscr{B}$, dvs. beräkna $[\mathbf{y}]_{\mathscr{B}}$. (3p)

3. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x, y) = 4x/9 + y + xy/3$ på området $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \ge 1 - x,\ y \le 1 - x^2\}$. (6p)

4. Låt $A$ vara matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix}.$$
   a) Finns det en ortogonal bas för $\mathbb{R}^2$ bestående av egenvektorer till $A$? (2p)
   b) Beräkna $A^5$. (4p)

V.g. vänd ↪

5. Låt $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vara funktionen $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + 2x_3$ och låt $\Pi$ vara planet $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ f(x_1, x_2, x_3) = 0\}$.

   a) Beräkna en normalvektor, $\mathbf{n}$, till planet $\Pi$. (2p)

   b) Beräkna projektionerna av standardbasvektorerna i $\mathbb{R}^3$ på underrummet genererat av normalvektorn $\mathbf{n}$. (2p)

   c) Skriv upp matrisen (i standardbasen) för den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definierad som spegling i planet $\Pi$, dvs. matrisen för avbildningen (2p)

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}.$$

6. Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara parallellogrammet med hörn i $(0,0)$, $(1,2)$, $(1,0)$ och $(2,2)$. Beräkna dubbelintegralen (6p)

$$\iint_D \sin\left(\frac{\pi}{2}(2x - y)\right) dxdy.$$

7. Låt $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara vektorfältet $\mathbf{F}(x,y) = (xy, x^2 + y)$ och låt $\mathcal{C}$ vara randkurvan (genomlöpt moturs) till triangeln, $T$, med hörn i $(0,-1)$, $(0,1)$ och $(1,0)$. Beräkna flödet, $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$, av $\mathbf{F}$ ut ur $T$. (5p)

   ($\mathbf{n}$ är den utåtriktade normalvektorn till $\mathcal{C}$ och $ds$ är båglängdselementet.)

8. Låt $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{b}$ vara vektorerna nedan och låt $A$ vara matrisen $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]$ och $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funktionen $f(\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

   a) Beräkna gradienten, $\nabla f(\mathbf{x})$, av $f$. (2p)

   b) Visa att en punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ är en kritisk punkt för $f$ om och endast om $\mathbf{x}$ uppfyller normalekvationerna (3p)

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}.$$

9. Låt $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion, låt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vara en fix punkt sådan att $\nabla f(a,b) \neq \mathbf{0}$ och låt $\mathcal{C}$ vara nivåkurvan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x,y) = f(a,b)\}$. Visa att $\nabla f(a,b)$ är en normalvektor till $\mathcal{C}$ i punkten $(a,b)$. (6p)

Lycka till!
/Håkan Samuelsson