

## KURVINTEGRALER

Låt  $f(x, y, z)$  vara en koninuerlig funktion och låt  $\mathcal{C}: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ,  $t \in [a, b]$ , vara en glatt kurva i rummet (dvs  $\mathbf{r}'(t)$  är kontinuerlig och  $\neq 0$  för alla  $t$ ).

Med *kurvintegralen* av  $f(x, y, z)$  över (eller längs) kurva  $\mathcal{C}$  menas integralen

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Om  $\mathcal{C}$  är styckvis glatt kurva dvs består av bitar  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$  "hopklustrade" vid ändpunkterna och som var och en är glatta kurvor, så definierar man kurvintegralen som summan

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds = \int_{\mathcal{C}_1} f(x, y, z) ds + \dots + \int_{\mathcal{C}_n} f(x, y, z) ds.$$

Vet att längden av  $\mathcal{C}$  ges av

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Låt  $F$  vara ett kontinuerligt vektorfält i planet:  $F(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$  med definitionsmängd  $D$  (enöppen mängd). Om  $\mathcal{C}$  är en orienterad glatt kurva i  $D$  med parameterframställningen  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ ,  $a \leq t \leq b$  så kallas uttrycket

$$\int_a^b F(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b (f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t)) dt$$

för *kurvintegralen av fältet*  $F$  längs kurvan  $\mathcal{C}$ .

Den betecknas  $\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\mathbf{r}$  eller  $\int_{\mathcal{C}} f dx + g dy$ . I det senare fallet talar vi också om *kurvintegralen av differentialformen*  $f dx + g dy$ .

Om  $\mathcal{C}$  är styckvis glattkurva med glatta bitar  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$  definieras kurvintegralen som

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{\mathcal{C}_n} F \cdot d\mathbf{r}.$$

Om kurvan  $\mathcal{C}$  är sluten kallas ofta kurvintegralen för cirkulationen av  $F$  runt  $\mathcal{C}$  och betecknas  $\oint_{\mathcal{C}} F \cdot d\mathbf{r}$ .

Vi har  $\mathbf{r}'(t) dt = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \hat{\mathbf{T}} ds$ , där  $\hat{\mathbf{T}}$  är enhetstangenten till kurvan,  $ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt$  är båglängdselementet. Vi har alltså

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} F \cdot \hat{\mathbf{T}} ds.$$

Låt  $D$  vara ett öppet område i planet eller rummet.  $D$  kallas *sammanhängande* om varje par av punkter  $P$  och  $Q$  i  $D$  kan bindas samman med en kontinuerlig kurva som ligger helt i  $D$ .

Ett område  $D$  kallas *enkelt sammanhängande* om varje enkel sluten kurva kan kontinuerligt dras samman till en punkt utan att lämna  $D$  under sammandragningen.

En kurva för vilken begynnelsepunkt och slutpunkt sammanfaller kallas

---

**Sats 15.4.1** Låt  $D$  vara ett öppet sammanhängande område och låt  $F$  vara ett glatt vektorfält definierat på  $D$ . Då är följande tre utsagor ekvivalenta:

- $F$  är konservativt i  $D$ .
- $\oint_{\mathcal{C}} F \cdot d\mathbf{r} = 0$  för varje sluten styckvis glatt kurva  $\mathcal{C}$  i  $D$ .
- Om  $\mathcal{C}_1$  och  $\mathcal{C}_2$  är två styckvis glatta kurvor i  $D$  med gemensamma start- och slutpunkter så är

$$\int_{\mathcal{C}_1} F \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot d\mathbf{r}.$$

---

Om  $F$  är konservativt med potential  $\phi$  och  $\mathcal{C}$  är en styckvis glatt kurva med startpunkt  $P_0$  och slutpunkt  $P_1$  så är

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\mathbf{r} = \phi(P_1) - \phi(P_0)$$