

YTOR OCH YTINTEGRALER

En parametriserad yta i rummet är en kontinuerlig funktion r definierad på en rektangel $R = \{(u, v) : a \leq u \leq b, c \leq v \leq d\}$ (eller annat slutet begränsat område med väldefinierad area) i uv -planet och med värden i \mathbb{R}^3 :

$$r(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, (u, v) \in R.$$

Notera att alla punkter på ytan är randpunkter eftersom ytan är ett två-dimensionellt objekt i \mathbb{R}^3 . Punkter på ytan som motsvaras av inre punkter i området R kallas trots detta inre punkten på ytan. Randen till området R avbildas ibland på en kurva som avgränsar ytan. Den kurvan kallas i så fall för ytans rand.

En parametriserad yta är *glatt* om funktionen $r = r(s, t)$ som ger parametreringen är glatt och $\frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} \neq 0$ för alla s och t .

Tangentplanet till ytan i den punkt som har parametervärdena (s, t) spänns upp av vektorerna r'_s och r'_t , $r'_s \times r'_t$ är normalen till ytan.

Ytan kallas *styckvis glatt* om den är sammansatt av glatta ytor, ”hoppklistradelängs randkurvor.

Låt $r = r(u, v)$ vara en parameter framställning av en glatt yta \mathcal{S} i rymden. Då är

$$dS = \|r'_u \times r'_v\| ds dt$$

ett areaelement och arean av ytan \mathcal{S} blir

$$\iint_{\mathcal{S}} dS = \iint_R \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du dv.$$

Eftersom

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\mathbf{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\mathbf{k}$$

blir arean

$$\iint_{\mathcal{S}} dS = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2} du dv.$$

Ytintegralen av en funktion $f(x, y, z)$ över ytan \mathcal{S} definieras enligt

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dS = \iint_R f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du dv.$$

ORIENTERADE YTOR OCH FLÖDESINTEGRALER

En yta \mathcal{S} kallas *orienterbar* om det finns ett enhetsvektorfält $\hat{N}(P)$ definierat kontinuerligt på \mathcal{S} i varje punkt ortogonalt mot \mathcal{S} . Ett vektorfält som uppfyller detta kallas för *orientering* av \mathcal{S} .

Om \mathcal{S} är en parametriserad glatt yta ($\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \neq 0$ i alla punkter på ytan) så ger

$$\hat{N} = \pm \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) / \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\|$$

Den sidan av ytan åt vilken normalvektorn $\hat{N}(P)$ pekar kallas för den positiva sidan, den andra kallas för negativa sidan.

Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ vara ett kontinuerligt vektorfält.

Vektorfältets flöde genom en orienterad yta \mathcal{S} är integralen

$$\int \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int \int_S \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS.$$

För parametriserade ytor är

$$\int \int_S \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS = \pm \int \int_R \mathbf{F}(r(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) dudv$$

det senare är lika med

$$\pm \int \int_R f(x, y, z) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + g(x, y, z) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + h(x, y, z) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv$$

Val av tecken \pm innebär ett val av riktning i vilken flödet uppfattas positivt.

GRADIENT, DIVERGENCE OCH ROTATION

Om $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ så definieras gradienten genom

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Man kan tänka sig om linjär avbildning

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

som verkar på f .

Den kan verka även på ett vektorfält: om $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ så är

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Sats 16.1.1 Låt B_ϵ vara ett klott med radie ϵ och medelpunkt P och låt S_ϵ vara randen till B_ϵ . Då gäller enligt divergenssatsen (16.4.8):

$$\int \int \int_{B_\epsilon} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int \int_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS,$$

där \hat{N} är utåtriktad enhetsnormal till sfären S_ϵ och

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \int \int_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS.$$

Ytintegralen kan ses som flödet ut ur punkten P , $\operatorname{div} \mathbf{F}(P)$ kan tolkas som "källstyrka per volymenhet".

Om $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ så definieras **rotation** $\operatorname{curl} \mathbf{F}$ enligt

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times (F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Sats 16.1.2 Låt S vara en cirkelskiva med radie ϵ och centrum i punkten P och enhets normalvektor \hat{N} . Låt C vara randcirkeln genomlöst moturssett från spetsen av \hat{N} . Då gäller enligt Stokes sats (16.5.10)

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \int_C (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \hat{N} dS$$

och

$$\operatorname{curl} \mathbf{F}(P) \cdot \hat{N} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Kurvintegralen kan tolkas som arbetet vektorfältet \mathbf{F} uträttar då en partikel går runt i den cirkulära banan. $\operatorname{curl} \mathbf{F}(P) \cdot \hat{N}$ kan alltså ses som fältets förmåga att få en partikel att rotera kring axeln \hat{N} , förmågan är störst om \hat{N} är parallell med $\operatorname{curl} \mathbf{F}(P)$ och obefintlig om de är ortogonala.