GRADIENT, DIVERGENCE OCH ROTATION

Om $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ så definieras gradienten genom

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Man kan tänka sig om linjär avbildning

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

som verkar på f.
Den kan verka även på ett vektorfält: om $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ så är

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}) \cdot (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Sats 16.1.1 Låt B_ϵ vara ett klott med radie ϵ och medelpunkt P och låt S_ϵ vara randen till B_ϵ. Då gäller enligt divergenssatsen (16.4.8):

$$\int\int\int_{B_\epsilon} \mathrm{div}\mathbf{F} dV = \int\int_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS,$$

där $\hat{N}$ är utåtriktad enhetsnormal till sfären S_ϵ och

$$\mathrm{div}\mathbf{F}(P) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \int\int_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS.$$

Ytintegralen kan ses som flödet ut ur punkten P", div$\mathbf{F}(P)$ kan tolkas som "källstyrka per volymenhet".

Om $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ så definieras **rotation** curl$\mathbf{F}$ enligt

$$\begin{aligned}
\mathrm{curl}\mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}) \times (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Sats 16.1.2 Låt S vara en cirkelskiva med radie ϵ och centrum i punkten P och enhets normalvektor $\hat{N}$. Låt C vara randcirkeln genomlöpt moturssett från spetsen av $\hat{N}$. Då gäller enligt Stokes sats (16.5.10)

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot dr = \int\int_S (\mathrm{curl}\mathbf{F}) \cdot \hat{N} dS$$

och

$$\mathrm{curl}\mathbf{F}(P) \cdot \hat{N} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \oint_C F \cdot dr.$$

Kurvintegralen kan tolkas som arbetet vektorfältet $\mathbf{F}$ uträttar då en partikel går runt i den cirkulära banan. curl$\mathbf{F}(P) \cdot \hat{N}$ kan alltså0 ses som fältets förmåga att få en partikel att rotera kring axeln $\hat{N}$, förmågan är störst om $\hat{N}$ är parallell med curl$\mathbf{F}(P)$ och obefintlig om de är ortogonala.

Et vektorfält **F** kallas*källfritt, divergensfritt (solenoidal)* i ett område D om div$\mathbf{F} = 0$ i D.

Et vektorfält **F** kallas *rotationsfritt (irrational)* i D om curl$\mathbf{F} = 0$ i D.

Sats. Om **F** är ett konservativt glatt fält så är F rotationsfritt.

Sats 16.2.4 Om **F** är glatt rotationsfritt vektotfält i ett enkelt sammanhängande område D så är **F** är konservativt.

Vi har alltså att ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ i planet är konservativt i ett enkelt sammanhängande område D om och endast om

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

i alla punkter $(x, y) \in D$,
ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ i rummet är konservativt i ett enkelt sammanhängande område D om och endast om

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) & = & \frac{\partial}{\partial x} g(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) & = & \frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} g(x, y, z) & = & \frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z) \end{cases}$$

i alla punkter $(x, y, z) \in D$.

Greens formel. Låt D vara ett kompakt område i planet vars rand består $\mathcal{C}$ består av en eller flera styckvis glatta enkla kurvor positivt orienterade relativt D. Antag också att $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ är ett glatt vektorfält i öppen mängd Ω som innehåller D. Då gäller

$$\oint_{\mathcal{C}} F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA.$$

Tillämpning av Greens formel.
Antag att $\mathcal{C}$ är den positivt orienterade randen till D. Då gäller

$$\oint_{\mathcal{C}} xdy = -\oint_{\mathcal{C}} ydx = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} (xdy - ydx) = \text{Arean av } D.$$