VEKTORRUM OCH BASER. DIMENSION, RANG OCH BASBYTE

Vektorer i $\mathbb{R}^n$ är n-tiplar av reella tal, $(u_1, \ldots, u_n)$, eller skrivna som kolonnmatriser (kolonnvektorer), $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$.

Vektorer i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ kan uppfattas som punkter eller som geometriska vektorer i planet respektive rummet. Två vektorer är lika om de lika koordinatvis.

Algebraiska operationer:

- addition, subtraktion:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \pm b_1 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{bmatrix};$$

- multiplikation med skalär:

$$\lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{bmatrix};$$

$$(-1) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

Addition, subtraktion av vektorer och multiplikation med skalär sker koordinatvis.

De algebraiska operationerna uppfyller vanliga räkneregler: om $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$ och c, d är skalärer så gäller:

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u} & c(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = c\mathbf{u}+c\mathbf{v} \\
(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) & (c+d)\mathbf{u} = c\mathbf{u}+d\mathbf{u} \\
\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{u} = \mathbf{u} & c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u} \\
\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = -\mathbf{u}+\mathbf{u} = \mathbf{0} & 1\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u}
\end{array}$$

Vi säger då att $\mathbb{R}^n$ är ett vektorrum.

Def. En icke-tom delmängd U i $\mathbb{R}^n$ kallas ett **underrum** i $\mathbb{R}^n$ om

- U är sluten under addition: $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in U \Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v} \in U$
- U är sluten under multiplikation med skalär: $\mathbf{u} \in U \Rightarrow c\mathbf{u} \in U$ då $c \in \mathbb{R}$.

U är ett vektorrum själv.
Obs! $\mathbf{0}$-vektorn tillhör varje underrum U i V.

Sats 1. Om $v_1, \ldots, v_p$ tillhör ett vektorrum $\mathbb{R}^n$ så är $\mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_p\}$ ett underrum i $\mathbb{R}^n$.

Def. Nollrummet till en $m \times n$-matris A, $\mathrm{Nul}(A)$, är mängden av alla lösningar till den homogena ekvationen $Ax = 0$:

$$\text{Nul}(A) = \{x : x \in \mathbb{R}^n \text{ och } Ax = 0\}.$$

Sats 2. Nollrummet till en $m \times n$-matris är ett underrum i $\mathbb{R}^n$

Def. Kolonnrummet till en $m \times n$ matris A, $\text{Col}(A)$ är mängden av alla linjärkombinationer av kolonnerna i A. Om $A = [\mathbf{a_1} \dots \mathbf{a_n}]$, så är

$$\text{Col}(A) = \text{Span}\{\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_n}\}$$

ekvivalent formulerat:

$$\text{Col}(A) = \{\mathbf{b} : \mathbf{b} = A\mathbf{x} \text{ för någon vektor } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Sats 3. Kolonnrummet till en $m \times n$ matris A är ett underrum i $\mathbb{R}^m$.

En mängd av vektorer $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ i $\mathbb{R}^n$ kallas **linjärt oberoende** om ekvationen

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_pv_p = 0$$

endast har trivial lösning $c_1 = c_2 = \dots = c_p = 0$ dvs matrisen $A = [v_1 \dots v_p]$ har endast pivot kolonner. Vektorerna kallas **linjärt beroende** om ekvationen ovan har icketrivial lösning dvs matrisen A har minst en icke-pivot kolonn.

Låt H vara ett underrum i $\mathbb{R}^n$.. En mängd av vektorer $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_p\}$ i H kallas en **bas** för H om

- (i) $\mathcal{B}$ är en linjärt oberoende mängd;
- (ii) Underrummet som spänns av $\mathcal{B}$ är hela rummet H, dvs

$$H = \text{Span}\{b_1, \dots, b_p\}.$$

Sats 10 (4.5). Om ett underrum H har en bas som består av n vektorer så består alla baser för H av precis n vektorer. Talet n kallas **vektorrumets dimension.**

Bas för nollrummet till en matris A: Lös ekvationssystemet $Ax = 0$. Identifiera vektorerna som spänner upp nollrummet.

Sats 6(4.3). Bas för kolonnrummet till A**.** Pivotkolonnerna i A bildar en bas för $\text{Col}(A)$.

Bas och koordinater. Låt $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_p\}$ vara en bas för H.

Vilkoret (ii) i basdefinitionen medför att varje vektor $u \in H$ kan skrivas som en linjär kombination av $b_1, \dots, b_p$:

$$u = c_1b_1 + \dots c_pb_p \tag{1}$$

Av (i) följer att denna framställning är entydig, ty om

$$u = d_1b_1 + \dots + d_pb_p$$

vore en annan framställning, så kunde man dra den ifrån (1) och få

$$0 = (c_1 - d_1)b_1 + \dots + (c_p - d_p)b_p.$$

Eftersom $b_1, \ldots .b_p$ är linjärt oberoende, ger detta $c_1 = d_1, \ldots c_p = d_p$. Koefficienterna i (1) kallas **koordinaterna** för vektorn u i basen $\mathcal{B}$. Vi har bevisat alltså

Sats 7 (4.4). Antag att $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_p\}$ är en bas för H. Då finns till varje vektor $u \in H$, en entydigt bestämd uppsättning skalärer, $c_1, \ldots, c_p$ sådana att $x = c_1 b_1 + \ldots + c_p b_p$.

Om $c_1, \ldots, c_p$ är $\mathcal{B}$-koordinaterna för x så kallas vektorn i $\mathbb{R}^p$

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

för **koordinatvektorn för** x **(relativt basen** $\mathcal{B}$**)** eller $\mathcal{B}$**-koordinatvektorn**.

Låt $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ vara en bas i $\mathbb{R}^n$ och

$$P_{\mathcal{B}} = [b_1, \ldots, b_n].$$

Vektorekvationen $x = c_1 b_1 + \ldots + c_n b_n$ är ekvivalent med

$$x = P_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}.$$

$P_{\mathcal{B}}$ kallas för **basbytesmatrisen** från $\mathcal{B}$ till standardbasen.

Eftersom $P_{\mathcal{B}}$:s kolonner är linjärt oberoende är $P_{\mathcal{B}}$ inverterbar och

$$P_{\mathcal{B}}^{-1} x = [x]_{\mathcal{B}}.$$

Man kan bevisa att om ett underrum H har en bas bestende av n vektorer, så måste varje bas för H bestå av n vektorer.

Def. Låt H vara ett underrum i $\mathbb{R}^m$. H:s **dimension**, dim H är antalet vektorer i en bas för H. Om H endast innehåller nollvektorn $H = \{0\}$ så är dim$H = 0$.

---

dim Nul(A)=antalet fria variabler i ekvationen $Ax = 0$
dim Col(A)=antalet pivotkolonner i A.

RANK

Def. Dimensionen av Col A kallas rangen för A, rank A.

Sats 14. Dimensionssatsen. Låt A vara en $m \times n$-matris. Då

$$\text{rank } A + \text{dim Nul } A = n$$