
EGENVÄRDEN OCH EGENVEKTORER

Ex.1 (a) T spegling i planet $\pi: ax + by + cz = 0$. Låt \mathbf{n} vara en normal till π . Då $T(\mathbf{n}) = -\mathbf{n} = (-1)\mathbf{n}$ och $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ för alla $\mathbf{v} \in \pi$.

(b) $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $Me_1 = 2e_1$, $Me_2 = 3e_2$.

(c) $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $Me_1 = 2e_1$, men $Me_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ är inte parallell med e_2 .

Def. En **egenvektor** till en $n \times n$ -matris A är en vektor $x \neq 0$ så att Ax är parallell med x , dvs

$$Ax = \lambda x \quad (1)$$

för något tal λ .

Ett tal λ kallas **egenvärde** om det finns en vektor $x \neq 0$ så att (1) gäller. Varje sådant x sägs vara en egenvektor till egenvärdet λ .

Om $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning sägs x vara en egenvektor till egenvärdet λ om

$$T(x) = \lambda x, x \neq 0.$$

I **Ex.1(a)** är \mathbf{n} en egenvektor till egenvärdet -1 , varje \mathbf{v} i π är en egenvektor till egenvärdet 1 .

I **Ex.1(b)** är e_1 en egenvektor till egenvärdet 2 , e_2 är inte en egenvektor.

OBS1 λ är ett egenvärde $\Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$ har en icke-trivial lösning.

OBS2 Om v är en egenvektor så är μv , $\mu \neq 0$, också en egenvektor.

Def. Om λ är ett egenvärde kallas mängden av alla lösningar till $(A - \lambda I)x = 0$ för egenrummet till egenvärdet λ ($= Nul(A - \lambda I)$).

Ex.2 Linjen L genom origo som är ortogonal mot planet π är egenrummet till egenvärdet -1 för speglingen i planet π . π är egenrummet till egenvärdet $+1$.

Ex.3 Låt $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$. Visa att 2 är ett egenvärde och bestäm motsvarande egenrum!

Karakteristiskekvation.

λ är ett egenvärde till $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$ (den karakteristiska ekvationen), ty

λ är ett egenvärde $\Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$ har en icke-trivial lösning $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.

Ex.4 Sök alla egenvärden till A från Ex.3:

Sats 2. Om v_1, \dots, v_r är egenvektorer svarande mot olika egenvärden till en $n \times n$ -matris A så är $\{v_1, \dots, v_r\}$ linjärt oberoende.