

DIAGONALISERING

Def. En $n \times n$ -matris A sägs vara diagonaliserbar om det finns en inverterbar matris P och en diagonal matris D sådana att $A = PDP^{-1}$.

Sats 5.3.5. En $n \times n$ -matris A är diagonaliserbar om och endast om A har n linjärt oberoende egenvektorer.

$A = PDP^{-1}$, eller $P^{-1}AP = D$, där D är en diagonalmatris,

\Leftrightarrow

kolonnerna i P är n linjärt oberoende egenvektorer till A . I så fall är diagonalelementen i D motsvarande egenvärden till A (i samma ordning som egenvektorerna i P).

Bevis. Vi observerar först att om P är en $n \times n$ -matris med kolonner $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ och om D är en diagonalmatris med diagonalelement $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ så

$$AP = A[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n] = [A\mathbf{v}_1 \dots A\mathbf{v}_n] \quad (1)$$

medan

$$PD = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1 \mathbf{v}_1 \quad \lambda_2 \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \lambda_n \mathbf{v}_n] \quad (2)$$

Antag att A är diagonaliserbar och $A = PDP^{-1}$. Då $AP = PDP^{-1}P = PD$. (1) och (2) ger

$$[A\mathbf{v}_1 A\mathbf{v}_2 \dots A\mathbf{v}_n] = [\lambda_1 \mathbf{v}_1 \quad \lambda_2 \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \lambda_n \mathbf{v}_n] \quad (3)$$

och

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_n = \lambda_n \mathbf{v}_n \quad (4)$$

Eftersom P är inverterbar måste kolonnerna $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vara linjärt oberoende. Vi har alltså visat "endast omdelen, dvs A är diagonaliserbar \Rightarrow A har n linjärt oberoende egenvektorer.

Antag nu att A har n linjärt oberoende egenvektorer $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ som svarar egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. För $P = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n]$ och $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ får vi enligt (1)-(3) att $AP = PD$. Vidare, eftersom P är inverterbar (kolonnerna i P är linjärt oberoende) är

$$A = PDP^{-1}.$$

Ex.1 Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} -7 & -16 & 4 \\ 6 & 13 & -2 \\ 12 & 16 & 1 \end{bmatrix}$

Sats 5.3.6. Om $n \times n$ -matrisen A har olika egenvärden så är A diagonaliserbar.

Bevis. Följer ur sats 2 och sats 5 (kapitel 5).

Sats 5.3.7. Låt A vara $n \times n$ -matris med p ($p \leq n$) olika egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

(a) Dimensionen av egenrummet till egenvärdet λ_k , $1 \leq k \leq p$, är mindre eller lika med ordningen av λ_k som nollställe till det karakteristiska polynomet.

(b) A är diagonaliserbar om och endast om för varje λ_k är dimensionen av egenrummet till λ_k lika med ordningen av λ_k som nollställe till det karakteristiska polynomet.

(c) Om A är diagonaliserbar och \mathcal{B}_k är en bas för egenrummet till λ_k blir $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ en egenvektorsbas i \mathbb{R}^n .

Ex.2 Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ är inte diagonaliserbar. **Visa!**