

GRÄNSVÄRDE

Låt P vara en punkt i \mathbb{R}^n , $r > 0$. Med en **omgivning** $B_r(P)$ till P menas mängden av alla punkter Q vars avstånd till P är mindre än r . P kallas en **inre punkt** i en delmängd A av \mathbb{R}^n om det finns en omgivning till P som helt ligger i A . P är en **randpunkt** om varje omgivning till P råkar A och komplementet till A .

Def. Låt f vara en reellvärd funktion av två variabler med definitionsmängd $D(f)$. Vi säger att

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

om

- varje omgivning till (a, b) innehåller punkter i $D(f)$ andra än (a, b) ;
 - till varje positivt $\epsilon > 0$ finns ett positivt tal $\delta = \delta(\epsilon)$ sådant att $|f(x, y) - L| < \epsilon$ gäller för alla punkter $(x, y) \in D(f) \cap B_\delta(a, b)$.
-

Räkneregler för gränsvärden

För att underlätta formuleringarna utgår vi att alla inblandade funktioner har samma definitionsmängd.

Om $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ och $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = M$ så gäller

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f(x, y) + g(x, y)) = L + M$;
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f(x, y)g(x, y)) = LM$;
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f(x, y)/g(x, y)) = L/M$ om $M \neq 0$;
4. (**Instängningsregeln**) Om $f(x, y) \leq h(x, y) \leq g(x, y)$ och $L = M$ så $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(x, y) = L$

(**Sammansättningsregeln**) Om $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(D(f)) \subset D(g)$ och $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$, $\lim_{z \rightarrow L} g(z) = M$ så

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(f(x, y)) = M.$$

Kontinuitet

En funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig i (a, b) om $(a, b) \in D(f)$ och $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

Vi säger att f är kontinuerlig om f är kontinuerlig i varje punkt i definitionsmängden $D(f)$.

Det följer ur definition och gränsvärderäkneregler att om f, g är kontinuerliga i (a, b) så är cf ($c \in \mathbb{R}$), $f + g$, fg , f/g (om $g(a, b) \neq 0$), $h \circ g$ om $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig i $f(a, b)$.

PARTIELL DERIVATA

Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ med definitionsmängd $D(f)$ och antag att (a, b) är en inre punkt i $D(f)$.

Den partiella derivatan av f med avseende på x är funktionen $f_1(x, y)$ vars funktionsvärde ges av gränsvärdet

$$f_1(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

i de punkter gränsvärdet existerar. På motsvarande sätt definieras $f_2(x, y)$, den partiella derivatan av f med avseende på y .

Olika skrivsätt för partiella derivator:

$$f_1(x, y) = D_1 f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}$$

och i punkten (a, b)

$$f_1(a, b) = D_1 f(a, b) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)|_{(a,b)} = f'_x(a, b) = \frac{\partial z}{\partial x}|_{(a,b)}$$