PARTIELLA DERIVATOR AV HÖGRE ORDNING

Om de partiella derivatorna av $z = f(x, y)$ är partielltderiverbara så kan vi definiera

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f'_x(x, y) = f''_{xx}(x, y) = f_{11}(x, y)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f'_y(x, y) = f''_{yx}(x, y) = f_{21}(x, y)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f'_x(x, y) = f''_{xy}(x, y) = f_{12}(x, y)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f'_y(x, y) = f''_{yy}(x, y) = f_{22}(x, y)$$

Vi kan uppreppa processen till högre ordningens derivator.

Sats 12.4.1 Om alla pertiella derivator av ordning till och med k är kontinuerliga (skriver $f \in C^k$) i D (D är öppen) så spelar det ingen roll i vilken ordning deriveringsregelrna utförs, resultatet blir detsamma, som t.ex. är

$$f_{12} = f_{21} \text{ om } f \in C^2,$$
$$f_{1112} = f_{1121} = f_{1211} = f_{2111} \text{ om } f \in C^4.$$

KEDJEREGELN

Om $z = f(x, y)$ har kontinuerliga partiella derivator och om $x = x(t)$, $y = y(t)$ är deriverbara funktioner så gäller

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Alternativt skrivsätt

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f_1(x(t), y(t)) x'(t) + f_2(x(t), y(t)) y'(t).$$

Om $z = f(x, y)$ har kontinuerliga partiela derivator och om $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$ har partiella derivator så gäller

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Kedjeregeln på matrisform är

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$$

DIFFERENTIERBARHET

Med **linjärisering** av f i punkten (a,b) menas fnktionen

$$L(x,y) = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b).$$

Grafen till linjäriseringen av f i punkten (a,b) är tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(a,b,f(a,b))$.

En funktion f kallas **differentierbar** om det finns konstanter A_1, A_2 sådana att

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = A_1 h + A_2 k + \sqrt{h^2+k^2}\rho(h,k),$$

där $\rho(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$. I detta fall blir f partiellt derivarbar i (a,b) och $A_1 = f_1(a,b)$, $A_2 = f_2(a,b)$.

Talet $\sqrt{h^2+k^2}\rho(h,k)$ är fellet som uppstår då f ersätts med linjäriseringen L. Om f är differentierbar blir fellet litet i jämförelse med $\sqrt{h^2+k^2}$.

Sats 12.6.4. Om f_1, f_2 är kontinuerliga i en omgivning till (a,b) så är f differentierbar.

Sats 12.6.5. Låt $z = f(x,y)$, där $x = u(s,t)$ och $y = v(s,t)$. Antag att

- $u(a,b) = p$, $v(a,b) = q$
- u och v har partiella derivator i punkten (a,b)
- f är differentierbar i punkten (p,q).

Då har $z = w(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$ partiella derivator av ordning ett med avseende på s och t i punkten (a,b) och

$$w_1(a,b) = f_1(p,q)u_1(a,b) + f_2(p,q)v_1(a,b)$$
$$w_2(a,b) = f_1(p,q)u_2(a,b) + f_2(p,q)v_2(a,b)$$
