EXTREMVÄRDE UNDER BIVILLKOR

Med största värdet av $f(x, y)$ på en mängd D, som förutsätts vara en delmängd av f:s definitionsmängd $\mathcal{D}(f)$, menas största värdet av $f(x, y)$ för punkter som ligger i D.

Ofta ges D av en eller flera olikheter eller ekvationer som $g(x, y) \leq 0$, $g(x, y) = 0$.
Då D ges på detta sätt kallas största värdet av f på D ofta största värdet av f under bivillkoret $g(x, y) \leq 0$, $g(x, y) = 0$.

Man säger att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ har **lokalt maximum** i en punkt (a, b) under bivillkoret $g(x, y) \leq 0$ om punkten uppfyller bivillkoret och $f(x, y) \leq f(a, b)$ för alla (x, y) som uppfyller bivilllkoret och ligger i någon lämplig omgivning till (a, b).

Kom ihåg:
Sats 13.1.2 (Existens av extremvärde). Om f är kontinuerlig i ett slutet, begränsat område D så har funktionen ett största värde och ett minsta värde i D. I de punkter dessa värden antas har f lokalt maximum respektive lokalt minimum. De alltså finns bland

- singulära punkter
- randpunkter
- kritiska punkter.

LAGRANGES MULTIPLIKATORMETOD

Sats 13.3.4 Antag att

- funktionerna f och g har kontinuerliga första ordningens partiella derivator i en omgivning av (a, b)
- punkten (a, b) ligger på kurvan $C : g(x, y) = 0$ (dvs $g(a, b) = 0$)
- f har lokalt maximum eller minimum i (a, b) under bivillkoret $g(x, y) = 0$
- punkten (a, b) är inte ändpunkt till kurvan C
- $\nabla g(a, b) \neq 0$.

Då finns ett tal λ så att (a, b, λ) är kritisk punkt för Lagranges funktionen

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Att (a, b, λ) är en kritisk punkt för $L(x, y, \lambda)$ innebär att $\nabla f(a, b)$ och $\nabla g(a, b)$ är parallella. Detta innebär i sin tur att nivåkurvan $f(x, y) = k$, där $k = f(a, b)$ och kurvan $g(x, y) = 0$ tangerar varandra i punkten (a, b)

Vidare $\nabla f(a,b) = \lambda \nabla g(a,b) \Leftrightarrow (\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)) = \lambda(\frac{\partial g}{\partial x}(a,b), \frac{\partial g}{\partial y}(a,b))$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

Alltså för att bestämma den sökande inre punkt (a,b) måste man bestämma punkter där (1) gäller och $g(a,b) = 0$.
