DUBBELINTEGRAL

Låt D vara en axelparallell rektangel i xy-planet:

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

En *partition* P av D är en indelning av D i mindre, axelparallella rektanglar: $D = \cup_{i=1}^{n} \cup_{j=1}^{m} R_{ij}$, där

$$R_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{i-1} \leq y \leq y_i\},$$

och $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$.
Normen av partitionen, $||P||$, är längsta diagonalen i alla delrektanglarna.

En **Riemannsumma** till $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erhålls om man väljer en punkt (x_{ij}^*, y_{ij}^*) i varje delrektangel R_{ij} och bildar summan

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A_{ij},$$

där $\Delta A_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})$ är arean av rektangel R_{ij}.

Om $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) > 0$ kan termen $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A_{ij}$ tolkas som volymen av ett rätblock med bas R_{ij} och höjd $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$.

När indelningen är ”oändligt fin” och funktionen f är ”bra” är Riemannsumman volymen av kroppen med bottenyta D och ytan $z = f(x, y)$ till lock om $f(x, y) \geq 0$ på D.

Def. Funktionen f är integrerbar över rektangeln D och har dubbelintegralen

$$I = \int\int_D f(x, y) dA$$

om det är så att för varje tal ϵ finns det ett tal δ (som beror på ϵ) så att

$$|R(f, P) - I| < \epsilon$$

för varje indelning P av D som uppfyller $||P|| < \delta$ och för alla val av punkter i delrektanglarna i P.

Sats 1'. Om f är kontinuerlig på en kompakt rektangel D så är den integrerbar.

Dubbelintegral över allmännare områden:
Antag att $f(x, y)$ är definierad och begränsad på ett *begränsat* område D.
Välj en axelparallell rektangel R som innehåller D. Låt $\hat{f}(x, y)$ vara en utvidgning av f till R som ges av

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{om } (x, y) \in D \\ 0 & \text{om } (x, y) \notin D \end{cases}$$

Då ges dubbelintegralen av f över D av

$$\int\int_D f(x, y) dA = \int\int_R \hat{f}(x, y) dA$$

om den senare existerar.

Om D inte är en rektangel så blir oftast $\hat{f}(x,y)$ icke kontinuerlig (diskontinuitet på randen) och vi kan inte använda föregående sats direkt. Men om randen är snäll"(har 0-arean) har den ingen betydelse.
Grafen till en kontinuerlig funktion av en variabel $y = \varphi(x)$ utgör en snäll rand. Randen= $\cup_{i=1}^{n}\gamma_i$, där γ_i är glatta kurvor av ändlig längd är snäll.

Sats 14.1.1. Om integrationsområde D är slutet och begränsat, och har en snäll rand R och f är kontinuerlig på D så är f integrerbar över D och

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_{D\setminus R} f(x,y)dA$$

Dubbelintegralens egenskaper

- $\int\int_D f(x,y)dA = 0$ om D har area 0;
- $\int\int_D dA$ =arean av D;
- Om $f(x,y) \geq 0$ i hela D så är $\int\int_D f(x,y)dA = V \geq 0$, där V är volymen av kroppen som begränsas nedåt av D och uppåt av ytan $z = f(x,y)$;
- Om $f(x,y) \leq 0$ i hela D så är $\int\int_D f(x,y)dA = -V \leq 0$, där V är volymen av kroppen som begränsas uppåt av D och nedåt av ytan $z = f(x,y)$;
- Om k är en konstant så gäller

$$\begin{aligned}\int\int_D kf(x,y)dA &= k\int\int_D f(x,y)dA\\ \int\int_D (f(x,y)+g(x,y))dA &= \int\int_D f(x,y)dA + \int\int_D g(x,y)dA;\end{aligned}$$

- Om $D = D_1 \cup D_2$ och arean av $D_1 \cap D_2$ är 0 så är

$$\int\int_{D_1\cup D_2} f(x,y)dA = \int\int_{D_1} f(x,y)dA + \int\int_{D_2} f(x,y)dA;$$

- Om $f(x,y) \leq g(x,y)$ i hela D så gäller

$$\int\int_D f(x,y)dA \leq \int\int_D g(x,y)dA;$$

- $|\int\int_D f(x,y)dA| \leq \int\int_D |f(x,y)|dA$.

Dubbelintegraler över speciella område.

Ett område D kallas y-*enkelt* om det kan skrivas

$$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\},$$

där $y = c(x)$, $y = d(x)$ är kontinuerliga kurvor.

Sats 14.2.2. Om f är kontinuerlig på D så är f integrerbar över D och

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$

(Dubbelintegralen beräknas genom upprepad integrering).

Generaliserad dubbelintegral

En dubbelintegral $\int\int_D f(x,y)dA$ kallas *generaliserad* (improper) om

- D inte är begränsad mängd, eller
- f inte är begränsad på D.

Konvergens för generaliserade integraler:
Man skall, i princip, ta en följd av allt större begränsade delmängder D_n av D, $D_{n-1} \subset D_n$, där f är begränsad och $\cup D_n = D$. Konvergens innebär då att man får samma gränsvärde då $n \to \infty$ oavsett hur mängderna D_n valts.

Sats. Om f **inte växlar tecken** i D och D är y-enkelt så gäller följande:
Om

$$\int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

är ändligt så är den generaliserade integralen konvergent och

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Om f antar både positiva och negativa värde och den generaliserade integralen $\int\int_D |f(x,y)|dA$ är konvergent så är $\int\int_D f(x,y)dA$. Om D är dessutom y-enkelt kan den senare beräknas genom upprepad integrering.

Medelvärde.

Låt f vara kontinuerlig på en kompakt mängd D. Då har f ett sörsta och ett minsta värde M och resp. N. Om D är en sammanhängande mängd antar f alla värde i intervallet $[M, N]$.
Vi har alltså $M \leq f(x,y) \leq N$ och därmed om A är arean av D

$$MA \leq \int\int_D |f(x,y)|dA \leq NA$$
$$M \leq \frac{1}{A}\int\int_D f(x,y)dA \leq N.$$

Därför
Medelvärdesatsen. 14.3.3. Det finns $(x_0, y_0) \in D$ så att

$$\int\int_D f(x,y)dA = f(x_0,y_0) \cdot (\text{ arean av } D).$$

$f(x_0, y_0)$ kallas medelvärdet för f på D.

Variabelbyte i dubbelintegraler.

Ett variabelbyte i planet genereras av en bijektiv avbildning

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

från ett område E i uv-planet till ett område D i xy-planet

Antag att funktionerna $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ ocg deras partiella första ordningens derivator är kontinuerliga.
Om $f(x, y)$ är integrerbara på D så är $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ på E och

$$\int \int_D f(x, y) dA = \int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_E f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Notera att $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ är **absolutbeloppet** av determinanten.