KURVINTEGRALER

Låt $f(x,y,z)$ vara en konrinuerlig funktion och låt $\mathcal{C}$: $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$, $t\in[a,b]$, vara en glatt kurva i rummet (dvs $\mathbf{r}'(t)$ är kontinuerlig och $\neq 0$ för alla t).
Med *kurvintegralen* av $f(x,y,z)$ över (eller längs) kurva $\mathcal{C}$ menas integralen

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)ds=\int_a^b f(\mathbf{r}(t))||\mathbf{r}'(t)||dt.$$

Om $\mathcal{C}$ är styckvis glatt kurva dvs består av bitar $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2,\ldots,\mathcal{C}_n$ "hopklistrade" vid ändpunkterna och som var och en är glatta kurvor, så definierar man kurvintegralen som summan

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)ds=\int_{\mathcal{C}_1} f(x,y,z)ds+\ldots+\int_{\mathcal{C}_n} f(x,y,z)ds.$$

Vet att längden av $\mathcal{C}$ ges av

$$\int_{\mathcal{C}} ds=\int_a^b ||\mathbf{r}'(t)||dt.$$

Låt F vara ett kontinuerligt vektorfält i planet: $F(x,y)=f(x,y)\mathbf{i}+g(x,y)\mathbf{j}$ med definitionsmängd D (enöppen mängd). Om $\mathcal{C}$ är en orienterda glatt kurva i D med parameterframstälningen $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$, $a\le t\le b$ så kallas uttrycket

$$\int_a^b F(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt=\int_a^b (f(x(t),y(t))x'(t)+g(x(t),y(t))y'(t))dt$$

för *kurvintegralen av fältet* F längs kurvan $\mathcal{C}$.
Den betecknas $\int_{\mathcal{C}} F\cdot d\mathbf{r}$ eller $\int_{\mathcal{C}} fdx+gdy$. I det senare fallet talar vi också om *kurvintegralen av differentialformen* $fdx+gdy$.

Om $\mathcal{C}$ är styckvis glattkurva med glatta bitar $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2,\ldots,\mathcal{C}_n$ definieras kurvintegralen som

$$\int_{\mathcal{C}} F\cdot d\mathbf{r}=\int_{\mathcal{C}_1} F\cdot d\mathbf{r}+\ldots+\int_{\mathcal{C}_n} F\cdot d\mathbf{r}.$$

Om kurvan $\mathcal{C}$ är sluten kallas ofta kurvintegralen för cirkulationen av F runt $\mathcal{C}$ och betecknas $\oint_{\mathcal{C}} F\cdot d\mathbf{r}$.

Vi har $\mathbf{r}'(t)dt=\dfrac{\mathbf{r}'(t)}{||\mathbf{r}'(t)||}||\mathbf{r}'(t)||dt=\hat{\mathbf{T}}ds$, där $\hat{\mathbf{T}}$ är enhetstangenten till kurvan, $ds=||\mathbf{r}'(t)||dt$ är båglängdselementet. Vi har alltså

$$\int_{\mathcal{C}} F\cdot d\mathbf{r}=\int_{\mathcal{C}} F\cdot\hat{\mathbf{T}}ds.$$

Låt D vara ett öppet område i planet eller rummet. D kallas *sammanhängande* om varje par av punkter P och Q i D kan bindas samman med en kontinuerlig kurva som ligger helt i D.
Ett område D kallas *enkelt sammanhängande* om varje enkel sluten kurva kan kontinuerligt dras samman till en punkt utan att lämna D under sammandragningen.
En kurva för vilken begynnelsepunkt och slutpunkt sammanfaller kallas *sluten*. Om en sluten kurva för övrigt inte skär själv kallas den *enkel*.

Sats 15.4.1 Låt D vara ett öppet sammanhängande område och låt F vara ett glatt vektorfält definierat på D. Då är följande tre utsagor ekvivalenta:

- F är konservativt i D.
- $\oint_{\mathcal{C}} F \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten styckvis glatt kurva $\mathcal{C}$ i D.
- Om $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$ är två styckvis glatta kurvor i D med gemensamma start- och slutpunkter så är

$$\int_{\mathcal{C}_1} F \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot d\mathbf{r}.$$

Om F är konservativt med potential ϕ och $\mathcal{C}$ är en styckvis glatt kurva med startpunkt P_0 och slutpunkt P_1 så är

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\mathbf{r} = \phi(P_1) - \phi(P_0)$$

.