

## SKALÄRPRODUKT

För geometriska vektorer definierades en produkt, skalärprodukten, som med hjälp av vektorernas koordinater i rätvinkligt koordinat system kunde skrivas

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Denna formel låter sig lätt generaliseras till  $\mathbb{R}^n$ : för  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  och

$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$  i  $\mathbb{R}^n$  definierar vi

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Med matrisbeteckningar kan detta skrivas  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$

---

Med hjälp härav och räknelagar för matrisprodukt får vi direkt

**Sats 1. Räknelagar för skalärprodukten.** Låt  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  och  $\mathbf{z}$  vara vektorer i  $\mathbb{R}^n$  och låt  $c$  vara en skalär. Då gäller:

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$
- $(c\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = c(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ , och  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

---

**Normen, längden** av en vektor  $\mathbf{x}$  är skalären  $\|\mathbf{x}\|$  som ges av

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Notera att  $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ .

En **enhetsvektor** eller **normerad** vektor är en vektor  $\mathbf{x}$  sådan att  $\|\mathbf{x}\| = 1$

Att **normera** en vektor  $\mathbf{x}$  innebär att skapa vektorn  $\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{x}$ . Vektorn  $\hat{\mathbf{x}}$  har samma riktning som  $\mathbf{x}$  och normen 1.

---

Låt  $\mathbf{x}$  och  $\mathbf{y}$  vara vektorer i  $\mathbb{R}^n$ . **Avståndet** mellan  $\mathbf{x}$  och  $\mathbf{y}$  betecknas  $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  och ges av

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

---

Två vektorer  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  i  $\mathbb{R}^n$  kallas **ortogonala** mot varandra om  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$   
Obs! Nollvektorn är ortogonal mot alla vektorer. Ingen annan vektor har denna egenskap.

---

**Pythagoras sats.** Två vektorer  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  i  $\mathbb{R}^n$  är ortogonala mot varandra omm

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

**Bevis.**

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

varav  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$  omm  $2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$  dvs  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  är ortogonala mot varandra.

---

Låt  $W$  vara ett underrum i  $\mathbb{R}^n$ . Om en vektor  $\mathbf{z}$  är ortogonal mot **varje** vektor  $u \in W$  så säger vi att  $\mathbf{z}$  är ortogonal mot  $W$ .

Mängden av alla vektorer  $\mathbf{z}$  som är ortogonala mot  $W$  kallas  $W$ :s **ortogonala komplement**. Denna mängd betecknas  $W^\perp$ .

---

**Viktiga fakta.**

a.  $\mathbf{x} \in W^\perp$  omm  $\mathbf{x}$  är ortogonala mot alla vektorer i mängden som spänner upp  $W$ .

b.  $W^\perp$  är ett underrum i  $\mathbb{R}^n$  (Exercises 29, 30).

---

**Ex.1** Låt  $W$  vara underrummet i  $\mathbb{R}^3$  som spänns upp av vektorerna  $S = \{u_1, u_2\}$ , där  $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Bestäm ortogonala komplementet  $W^\perp$ .

---

**Sats 3.** Låt  $A$  vara en  $m \times n$ -matris. Då gäller:

$$(\text{Row}(A))^\perp = \text{Nul}(A) \text{ och } (\text{Col}(A))^\perp = \text{Nul}(A^T)$$

**Bevis.** Ur matrisproduktens definition följer att  $Ax = 0$  är liktydigt med att  $x$  är ortogonal mot samtliga rader i  $A$  (eller hellre transponat, om vi vill att alla vektorer skall vara kolonnvektorer). Detta ger första likheten.

Eftersom  $\text{Col}(A) = \text{Row}(A^T)$  får vi också den andra likheten.

---

Eftersom alla underrum  $W$  i  $\mathbb{R}^n$  kan erhållas som  $\text{Col}(A)$  för någon matris  $A$  följer av rangsatsen att

$$\begin{aligned} \dim W + \dim W^\perp &= \dim \text{Col}(A) + \dim \text{Nul}(A^T) = \\ &= \text{rank}(A^T) + \dim \text{Nul}(A^T) = n. \end{aligned}$$

---

En mängd av vektorer kallas en **ortogonalmängd**, om vektorerna i mängden är parvis ortogonala.

En mängd av vektorer kallas en **ortonormerad** mängd eller en **ON-mängd**, om den är en ortogonalmängd, vars samtliga vektorer är normerade.

En ortogonalmängd som är en bas för ett linjärt rum, kallas en **ortogonalbas**. Om basen är en ON-mängd, kallas den en **ON-bas**.

---

**Sats 4.** Om  $S = \{u_1, \dots, u_k\}$  är en ortogonalmängd av nollskilda vektorer i  $\mathbb{R}^n$  så är  $S$  en linjärt oberoende mängd av vektorer.

$S$  är då en bas för underrummet i  $\mathbb{R}^n$  som spänns upp av  $S$ .