EGENVÄRDEN OCH EGENVEKTORER

Ex.1 (a) T spegling i planet π: $ax + by + cz = 0$. Låt $\mathbf{n}$ vara en normal till π. Då $T(\mathbf{n}) = -\mathbf{n} = (-1)\mathbf{n}$ och $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ för alla $\mathbf{v} \in \pi$.

(b) $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $Me_1 = 2e_1$, $Me_2 = 3e_2$.

(c) $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $Me_1 = 2e_1$, men $Me_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ är inte parallell med e_2.

Def. En **egenvektor** till en $n \times n$-matris A är en vektor $x \neq 0$ så att Ax är parallell med x, dvs

$$Ax = \lambda x \tag{1}$$

för något tal λ.

Ett tal λ kallas **egenvärde** om det finns en vektor $x \neq 0$ så att (1) gäller. Varje sådant x sägs vara en egenvektor till egenvärdet λ.

Om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning sägs x vara en egenvektor till egenvärdet λ om

$$T(x) = \lambda x, x \neq 0.$$

I **Ex.1(a)** är $\mathbf{n}$ en egenvektor till egenvärdet -1, varje $\mathbf{v}$ i π är en egenvektor till egenvärdet 1.
I **Ex.1(b)** är e_1 en egenvektor till egenvärdet 2, e_2 är inte en egenvektor.

OBS1 λ är ett egenvärde $\Leftrightarrow$ $(A - \lambda I)x = 0$ har en icke-trivial lösning.
OBS2 Om v är en egenvektor så är μv, $\mu \neq 0$, också en egenvektor.

Def. Om λ är ett egenvärde kallas mängden av alla lösningar till $(A - \lambda I)x = 0$ för egenrummet till egenvärdet λ $(= Nul(A - \lambda I))$.

Ex.2 Linjen L genom origo som är ortogonal mot planet π är egenrummet till egenvärdet -1 för speglingen i planet π. π är egenrummet till egenvärdet $+1$.

Ex.3 Låt $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$. Visa att 2 är ett egenvärde och bestäm motsvarande egenrum!

Karakteristiskekvation.

λ är ett egenvärde till $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$ (den karakteristiska ekvationen), ty

λ är ett egenvärde $\Leftrightarrow$ $(A - \lambda I)x = 0$ har en icke-trivial lösning $\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda I) = 0$.

Ex.4 Sök alla egenvärden till A från Ex.3:

Sats 2. Om $v_1, \ldots, v_r$ är egenvektorer svarande mot olika egenvärden till en $n \times n$-matris A så är $\{v_1, \ldots, v_r\}$ linjärt oberoende.

Bevis. Om $\{v_1, \ldots, v_r\}$ är linjärt beroende så finns ett minsta p så att v_{p+1} är en linjär kombination av $v_1, \ldots, v_p$ dvs

$$v_{p+1} = c_1 v_1 + \ldots + c_p v_p \tag{2}$$

Då är $\{v_1, \ldots, v_p\}$ linjärt oberoende, ty annars finns $j < p$ så att v_{j+1} är en linjär kombination av $v_1, \ldots, v_j$, vilket strider mot beskrivningen av p. Om nu $Av_k = \lambda_k v_k$ så ger (2) att

$$\lambda_{p+1} v_{p+1} = Av_{p+1} = c_1 Av_1 + \ldots + c_p Av_p = c_1 \lambda_1 v_1 + \ldots c_p \lambda_p v_p \tag{3}$$

och

$$\lambda_{p+1} v_{p+1} = c_1 \lambda_1 v_1 + \ldots c_p \lambda_p v_p \tag{4}$$

$(4) - \lambda_{p+1}(2)$ ger

$$0 = c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1})v_1 + \ldots c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1})v_p$$

Att $\{v_1, \ldots, v_p\}$ är linjärt oberoende ger

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1}) = \ldots = c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1}) = 0$$

Men $\lambda_1 - \lambda_{p+1} \neq 0, \ldots, \lambda_p - \lambda_{p+1} \neq 0$ ger

$$c_1 = \ldots = c_p = 0$$

Men då ger (2) att $v_{p+1} = 0$ vilket är orimligt eftersom en egenvektor $\neq 0$.