EXTREMVÄRDEN

En funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ har **lokalt maximum** (**lokalt minimum**) i en punkt (a, b) om det finns en omgivning $B_r(a, b)$ sådan att

$$f(x, y) \leq f(a, b) \text{ (respektive } f(x, y) \geq f(a, b)) \text{ för alla } (x, y) \in \mathcal{D}(f) \cap B_r(a, b).$$

En funktion har **globalt maximum** (**globalt minimum**) i i en punkt (a, b) om

$$f(x, y) \leq f(a, b) \text{ (respektive } f(x, y) \geq f(a, b)) \text{ för alla } (x, y) \in \mathcal{D}(f).$$

Sats 13.1.1(Nödvändiga villkor) Lokalt maximum/minimum kan erhållas i

- punkt där gradienten inte existerar (s.k. singulär punkt)
- punkt på randen av definitionsområdet
- punkt där grad $f(x, y) = 0$ (s.k. kritisk punkt)

Sats 13.1.2 (Existens av extremvärde). Om f är kontinuerlig i ett slutet, begränsat och sammanhängande område D så har funktionen ett största värde och ett minsta värde i D. I de punkter dessa värden antas har f lokalt maximum respektive lokalt minimum. De alltså finns bland

- singulära punkter
- randpunkter
- kritiska punkter.

Hur avgör man om en kritisk punkt är en extrempunkt?

Antag att funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator av ordning ett och två i en omgivning till punkten (a, b).
Med **Hessianen** i (a, b) menas matrisen

$$\mathcal{H}(a, b) = \begin{bmatrix} f_{11}(a, b) & f_{12}(a, b) \\ f_{21}(a, b) & f_{22}(a, b) \end{bmatrix}$$

Observera att $\mathcal{H}(a, b)$ är symmetrisk, dvs $\mathcal{H}(a, b) = \mathcal{H}(a, b)^T$ under villkoret ovan.

Låt A vara en symmetrisk $n \times n$ matris (dvs $A = A^T$).
A kallas **postivt definit** om $\mathbf{v}^T A\mathbf{v} > 0$ för alla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq 0$.
A kallas **negativt definit** om $\mathbf{v}^T A\mathbf{v} < 0$ för alla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq 0$.
A kallas **indefinit** om det finns $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ i $\mathbb{R}^n$ sådana att $\mathbf{v_1}^T A\mathbf{v_1} > 0$ och $\mathbf{v_2}^T A\mathbf{v_2} < 0$.

Sats 13.1.3 (Klassificering av kritiska punkter med andra derivatorna) Antag att (a,b) är en kritisk punkt för funktionen $f(x,y)$ i det inre av definitionsmängden. Antag att f har kontinuerliga partiella derivator av ordning ett och två. Då gäller följande:

- Om $\mathcal{H}(a,b)$ är positivt definit så har f lokalt minimum i (a,b).
- Om $\mathcal{H}(a,b)$ är negativt definit så har f lokalt maximum i (a,b)
- Om $\mathcal{H}(a,b)$ är indefinit så har f sadelpunkt i (a,b)
- Om $\mathcal{H}(a,b)$ inte är något ovanstående säger satsen inget.

Låt A vara en symmetrisk $n \times n$ matris (dvs $A = A^T$).
A är **postivt definit** omm alla A:s egenvärde är positiva.
A är **negativt definit** omm alla A:s egenvärde är negativa.
A är **indefinit** omm A har både negativa och positiva egenvärde.

Sats 13.1.3 Antag att (a,b) är en kritisk punkt för funktionen $f(x,y)$ i det inre av definitionsmängden. Antag att f har kontinuerliga partiella derivator av ordning ett och två.

- Om $\det(\mathcal{H}(a,b)) > 0$ och $f_{11}(a,b) > 0$ så har f lokalt minimum i (a,b).
- Om $\det(\mathcal{H}(a,b)) > 0$ och $f_{11}(a,b) < 0$ så har f lokalt maximum i (a,b).
- Om $\det(\mathcal{H}(a,b)) < 0$ så har f sadelpunkt i (a,b).
- Om $\det(\mathcal{H}(a,b)) = 0$ så ger denna test ingen information.