MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa
Datum: 2012-03-10 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Martin Berglund
tel. 0703-088304

Analys och Linjär Algebra K Kf Bt, del C (TMV036, MVE035)

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 11/12 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens (11/12) webbsida senast 12/3. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Därefter kan tentorna granskas och hämtas på MV:s exp. öppen alla vardagar 9-13.

---

1. Låt $f(x,y) = 1 - \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$.

(a) Skissa några nivåkurvor till ytan $z = f(x,y)$ samt själva ytan. (3p)

(b) Bestäm en normal och en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(5, 4, -4)$. (3p)

2. (a) Definiera begreppet egenvärde och egenvektor för en kvadratisk matris. Förklara varför lösningarna till den karakteristiska ekvationen till en matris är matrisens egenvärde. (2p)

(b) Låt (5p)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Bestäm A:s egenvärde och respektive egenvektorer. Är A diagonaliserbar? Motivera väl Ditt svar!

3. (a) Beräkna dubbelintegralen (3p)

$$\int\int_D x^2 y dx dy,$$

där D begränsas av parabeln $y = x^2$ och linjen $y = 1$.

(b) Beräkna trippelintegralen (3p)

$$\int\int\int_K z dx dy dz,$$

där K är den kropp som begränsas av ytan $z = 2 - x^2 - y^2$ och xy-planet, dvs $K = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

Var god vänd!

4. Matriserna $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ och $U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ är radekvivalenta.

   (a) Bestäm en ortogonal bas för Col$A$. (4p)

   (b) Ange en formel för beräkning av den ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$ på Col$A$ (Obs! Du behöver inte beräkna projektionen!) (2p)

5. Låt $f(x, y) = (y - x)e^{(x^2 - y)}$

   (a) Bestäm funktionens största och minsta värde i området $x^2 \leq y \leq x$. (5p)

   (b) Har funktionen något minsta värde i det obegränsade området $y \geq x^2$? (2p)

6. Låt $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ vara ett vektorfält i $\mathbb{R}^2$.

   (a) Bestäm fältlinjerna till vektorfältet $\mathbf{F}$. (2p)

   (b) Visa att $\mathbf{F}$ är ett konservativt vektorfält genom att beräkna en potential ϕ till $\mathbf{F}$. (2p)

   (c) Skissa några fältlinjer samt några nivåkurvor till ϕ. Vad finns det för samband mellan nivåkurvorna och fältlinjerna? (2p)

7. (a) Låt C vara den moturs orienterade cirkeln $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$. Låt (3p)

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$

   vara ett vektorfält i $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Beräkna kurvintegralen $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ genom att använda kurvintegralens definition.

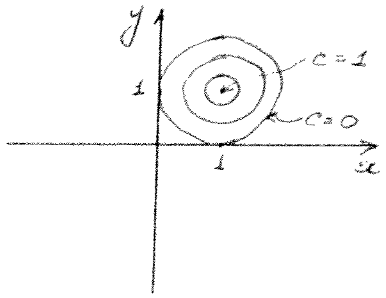
   (b) Låt γ vara den positivt orienterade randen till området $x^2 + 4y^2 \leq 9$, $x^2 + y^2 \geq 1$. (Obs! Randen består av två slutna kurvor). Med hjälp av Greens formel beräkna kurvintegralen $\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Vad blir $\oint_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ då σ är den medurs orienterade ellipsen $x^2 + 4y^2 = 9$? (3p)

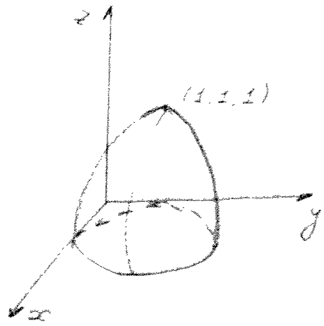
8. Formulera och bevisa kedjeregeln för $f \circ g$ då $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (eller $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) och $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Förklara noggrant varje steg i beviset som var diffrentierbarhet för funktionen f används samt var existens av derivatan för funktionen g utnyttjas. (6p)

Lycka till!
Lyudmila T

Lösningar

1. (a) Nivåkurvorna ges av $1-\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=c$ för olika värden på konstanter c, $1-c\geq 0$. Dessa är cirklar $(x-1)^2+(y-1)^2=(1-c)^2$ med centrum i punkten $(1,1)$. Ytan är paraboloiden:





(b) Man verifierar lätt att $(5,4,-4)$ ligger på ytan: $1-\sqrt{(5-1)^2+(4-1)^2}=1-5=-4$. Vi har också att

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} \text{ och } \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$$

och speciellt är $\frac{\partial f}{\partial x}(5,4)=-\frac{4}{5}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(5,4)=-\frac{3}{5}$. En normal till ytan blir alltså $\mathbf{n}=(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5},-1)$. Tangetplanet till ytan i punkten $(5,4,-4)$ ges av ekvationen

$$z+4=\frac{\partial f}{\partial x}(5,4)(x-5)+\frac{\partial f}{\partial y}(5,4)(y-4),$$

dvs $5z+4x+3y=12$.

Svar: $\mathbf{n}=(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5},-1)$, $5z+4x+3y=12$.

2. (a) Se kursboken.

(b) Vi söker egenvärde till matrisen A genom att lösa den karakteristiska ekvationen:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -6 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix}$$
$$=(4-\lambda)((1-\lambda)(8-\lambda)+12)=(4-\lambda)(\lambda^2-9\lambda+20)=0$$

Vi får $\lambda=4$ eller $\lambda^2-9\lambda+20=0$ dvs $\lambda=4$ eller $\lambda=5$. Vi har alltså att matrisen har två egenvärde: $\lambda=4$ och $\lambda=5$.

Vi söker nu egenvektorerna till egenvärdena 4 och 5.

$\lambda_1=4$: Vi har

$$A-4I_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -6 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att matrisens nollrum spänns upp av vektorn $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_2 = 5$: Vi har

$$A - 5I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Efter återsubstitution ser vi att matrisens nollrum spänns upp av vektorn

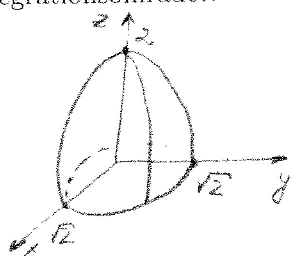
$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi kan alltså hitta högst två linjärt oberoende egenvektorer och därmed blir inte A diagonaliserbar.

3. (a) Området D är y-enklet och ges av $D = \{(x, y) : -1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1\}$. Dubbelintegralen kan beräknas enligt

$$\begin{aligned} \int\int_D x^2 y\,dxdy &= \int_{-1}^{1} (\int_{x^2}^{1} x^2 y\,dy)dx = \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2 y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=1} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^2 - x^4)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

(b) Vi gör först en bild av integrationsområdet:



Integralen kan beräknas på följande två sätt: Vi kan välja att utföra beräkningen med z som yttre integrationsvariabel. Ett plan parallelt med xy-planet genom $(0, 0, z)$ där $0 \le z \le 2$ ger en skärningsyta K_z som är cirkelskivan $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le (2 - z)\}$ med radien $\sqrt{2 - z}$. Vi får att

$$\begin{aligned} \int\int\int_K z\,dxdydz &= \int_0^2 \left(\int\int_{K_z} z\,dxdy\right) dz = \int_0^2 z\{ \text{ Arean av } E_z\}dz \\ &= \pi \int_0^2 z(2 - z)dz = \pi[z^2 - \frac{z^3}{3}]_{z=0}^{z=2} = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Projektionen av kroppen K på xy-planet är cirkelskivan D:$x^2 + y^2 \le 2$ och vi får

$$\begin{aligned} \int\int\int_K z\,dxdydz &= \int\int_D \left(\int_0^{2-x^2-y^2} z\,dz\right) dxdy \\ &= \int\int_D \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=2-x^2-y^2} dxdy = \frac{1}{2}\int\int_D (2 - x^2 - y^2)^2 dxdy \end{aligned}$$

För den dubbelintegralen ger övergång till polära koordinater, med $E = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\int_D (2 - x^2 - y^2)^2 dxdy &= \frac{1}{2}\int\int_E (2 - r^2)^2 r dr d\varphi \\ &= \pi \left[2r^2 - r^4 + \frac{r^6}{6}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{2}} = \frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$

4. (a) En bas för Col$A$ består av 1a, 2a och 4e kolonnerna, dvs

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Vi bestämmer nu en ortogonal bas mha Gramm-Schmidt metoden. Vi väljer den första basvektorn som $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ och beräknar dem andra mha av formeln:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{b}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

Svar: $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}^T$.

(b) Den sökta projektionen ges av

$$\mathrm{proj}_{\mathrm{Col}A}\mathbf{y} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3}\mathbf{b}_3$$

5. (a) Eftersom funktionen f saknar singulariteter så måste extremvärdena antas antingen i kritiska punkter i det inre av området eller i punkter på randen. Vi börjar med att bestämma ev. kritiska punkter till f. Vi har

$$\nabla f(x,y) = (e^{x^2-y}(2xy - 2x^2 - 1), e^{x^2-y}(1 + y - x)) = 0 \Leftrightarrow 2xy - 2x^2 - y = 0 \text{ och } 1 + y - x = 0$$

Ur den andra ekvationen får vi $y = x - 1$. Insätning i den första ekvationen ger oss $x = 1/3$. Vi får alltså en kritisk punkt $(1/3, -2/3)$. Denna ej ligger i området.

Vi undersöker sedan randen som består av två delar $R_1 : \{(x, x^2) : 0 \leq x \leq 1\}$ och $R_2 : \{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\}$.

$R_1 : g_1(x) = f(x, x^2) = x^2 - x$. Vi har $g_1'(x) = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$. Denna ligger i intervallet $0 \leq x \leq 1$ och funktionvärden är $g_1(1/2) = -1/4$. Funktionvärdena i ändpunkter är $g_1(0) = 0$, $g_1(1) = 0$.

$R_2 : g_2(x) = f(x, x) = 0$. Vi har alltså att funktionens största och minsta värde i området är 0 och respektive $-1/4$.

(b) Eftersom för $y \geq x$ har man $(y - x)e^{x^2-y} \geq 0$ och f:s minsta värde i området $x^2 \leq y \leq x$ är $-1/4$ blir det även minsta f:s värde i det obegränsade området $y \geq x^2$.

6. (a) Fältlinjerna bestäms ur följande differentialekvationen:

$$\frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{x^2} \Leftrightarrow xdx = 2ydy.$$

Denna har lösningar $x^2 = 2y^2 + C$ för olika värde av konstanten C.

(b) En eventuell potential φ satisfierar differentialekvationerna

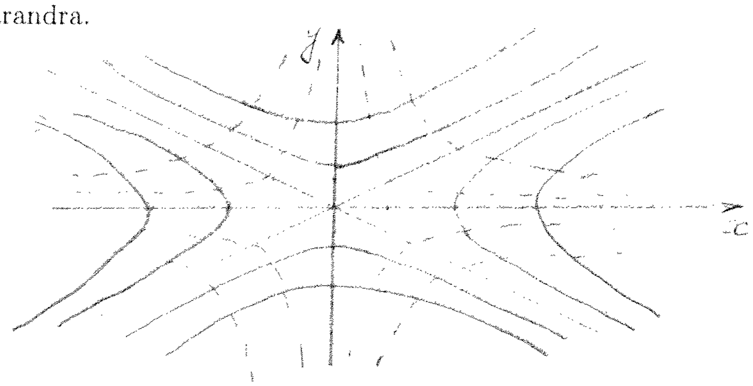
$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= F_1(x,y) = 2xy \\
\frac{\partial \varphi}{\partial y} &= F_2(x,y) = x^2
\end{aligned}$$

Integration av första ekvationen ger $\varphi(x,y) = x^2y + c(y)$, där $c(y)$ är en funktion av en variabel. Insättning i den andra ekvationen ger $x^2 + c'(y) = x^2$ varav $c'(y) = 0$ och därmed $c(y) = D$,där D är en konstant. Vi har därmed funnit att

$$\varphi(x,y) = x^2y$$

är en potential till det givna fältet.

(c) Fältlinjerna $x^2 = 2y^2 + C$ och nivåkurvorna $\varphi(x,y) = x^2y = D$ är ortogonala mot varandra.



7. (a) En lämplig parametrisering av cirkeln $\mathcal{C}$ är

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Med hjälp av denna får vi

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-R\sin t}{R^2(\cos^2 t + \sin^2 t}\mathbf{i} + \frac{R\cos t}{R^2(\cos^2 t + \sin^2 t}\mathbf{j} \right) \cdot (-R\sin t\mathbf{i} + R\cos t\mathbf{j})dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = 2\pi.
\end{aligned}$$

Observera att resultatet är oberoende av cirkelns radie.

(b) Låt $D = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 \le 9, x^2 + y^2 \ge 1\}$. Enligt Greens formel blir

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy \\
&= \int\int_D \left(\left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{x^2+y^2} \right) - \left(-\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} \right) \right) dxdy = 0.
\end{aligned}$$

Låt C vara den moturs orienterade enhetscirkeln. Då $\gamma = -\sigma \cup (-C)$ och

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\oint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Det följer nu ur resultat i (a) att

$$\oint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\oint_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -2\pi - 0 = -2\pi.$$

8. Se kursboken eller föreläsningsanteckningar.