TRIPPELINTEGRALER

Vi definierar trippelintegraler genom att följa samma mönstret som för dubbelintegraller: vi definierar först trippelintegral av en funktion $f(x, y, z)$ på ett axelparallellt rätblock Δ med hjälp av Riemannsumman $R(f, P)$, där P är en indelning av Δ i axelparallella delblock; denna integral utvidgas sedan steg för steg tills man har integraller av formen

$$\int\int\int_D f(x, y, z)dV$$

med kontinuerlig $f(x, y, z)$ och relativt allmänt område $D \subset \mathbb{R}^3$.

Trippelintegraler över speciella område.

Om D är en axelparallell rätblock: $D = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$; så

$$\int\int\int_D f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x, y, z)dz\right) dy\right) dx,$$

(x, y, z får byta rollerna).

Om $D = \{(x, y, z) : \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y), (x, y) \in E\}$, ($E$ är proektionen av D på xy-planet) α, β är kontinuerliga , så

$$\int\int\int_D f(x, y, z)dxdydz = \int\int_E \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)dz\right) dxdy,$$

(x, y, z får byta rollerna).

Om $D = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, (y, z) \in E_x\}$, ($E_x$ är snittet mellan kroppen D och planet $x = konst$) så

$$\int\int\int_D f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b \left(\int\int_{E_x} f(x, y, z)dydz\right) dx,$$

(x, y, z får byta rollerna).

Variabelsubstitution

Antag att $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ är en $1 - 1$ avbildning av ett område E i uvw-rummet på område D i xyz-rummet. Antag att funktionerna $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ och deras partiella första ordningens derivator är kontinuerliga.
Om $f(x, y, z)$ är integrerbar på D så är

$$\begin{aligned}&\int\int\int_D f(x, y, z)dxdydz \\ &= \int\int\int_E f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| dudvdw\end{aligned}$$

VEKTORFÄLT

Ett **vektorfält** i planet är en funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = f(x,y)\mathbf{i} + g(x,y)\mathbf{j}.$$

Vi uppfattar (x,y) som en punkt i planet och $F(x,y)$ som en vektor i planet. För att åskadligöra vektorfältet väljer vi ett antal punkter (x_i,y_i) och avsätter vektorerna $F(x_i,y_i)$ i respektive punkter.

Fältlinjerna till ett vektorfält är kurvor vars tangenter är parallella med vektorfältens vektorer.
Alltså om (a,b) är en punkt i definitionsmängden till vektorfältet $F(x,y) = f(x,y)\mathbf{i}+g(x,y)\mathbf{j}$ så blir en fältlinje genom denna punkt en kurva $r(t) = (x(t),y(t))$ sådan att

- $(a,b) = r(t_0) = (x(t_0),y(t_0))$ för något t_0;
- i varje punkt $(x(t),y(t))$ på kurvan är kurvtangenten $x'(t)\mathbf{i}+y'(t)\mathbf{j}$ parallell med fältsvektorn $f(x(t),y(t))\mathbf{i}+g(x(t),y(t))\mathbf{j}$ i denna punkt, dvs

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= \lambda(t)f(x(t),y(t)) \\ \dfrac{dy}{dt} &= \lambda(t)g(x(t),y(t)) \end{cases}$$

Fältlinjerna är alltså lösningarna till den differentialla ekvationen

$$\frac{dx}{f(x,y)} = \frac{dy}{g(x,y)}.$$

Ett vektorfält $F(x,y) = f(x,y)\mathbf{i} + g(x,y)\mathbf{j}$ med definitionsmängd D kallas **konservativt** om det finns en funktion $\phi(x,y)$ definierad på D sådan att

$$\nabla\phi(x,y) = F(x,y) \text{ för alla } (x,y) \in D.$$

Funktionen $\phi(x,y)$ kallas **potential** till $F(x,y)$.

Ett nödvändigt vilkor för ett konservativt vektorfält i planet
Om $F(x,y) = f(x,y)\mathbf{i}+g(x,y)\mathbf{j}$ har kontinuerliga partiella derivator och är konservativt i D så måste gälla att

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}g(x,y) \tag{1}$$

i alla punkter $(x,y) \in D$.

Nivåkurvorna $\phi(x,y) = C$ kallas *ekvipotentialkurvor* till $F(x,y)$. Eftersom $\nabla\phi(x_0,y_0)$ är en normalvektor till kurvan $\phi(x,y) = C$ genom (x_0,y_0) och lika med $F(x_0,y_0)$ som är parallell med tangentvektorn till fältlinjen genom (x_0,y_0), blir fältlinjerna ortogonala mot ekvipotentialkurvorna.

Ett vektorfält i rummet $F(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$ med definitionsmängd D kallas **konservativt** om det finns en funktion $\phi(x,y,z)$ definierad på D sådan att

$$\nabla\phi(x,y,z) = F(x,y,z) \text{ för alla } (x,y,z) \in D.$$

Funktionen $\phi(x,y,z)$ kallas **potential** till $F(x,y,z)$.

Nivåytor $\phi(x, y, z) = C$ kallas *ekvipotentialytor*.

Ett nödvändigt vilkor för ett konservativt vektorfält i rummet
Om $F(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)$ har kontinuerliga partiella derivator och är konservativt i D så måste gälla att

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} g(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} g(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z) \end{cases} \tag{2}$$

i alla punkter $(x, y, z) \in D$.

Låt D vara ett öppet område i planet eller rummet. D kallas *sammanhängande* om varje par av punkter P och Q i D kan bindas samman med en kontinuerlig kurva som ligger helt i D.
Ett område D kallas *enkelt sammanhängande* om varje enkel sluten kurva kan kontinuerligt dras samman till en punkt utan att lämna D under sammandragningen.
En kurva för vilken begynnelsepunkt och slutpunkt sammanfaller kallas *sluten*. Om en sluten kurva för övrigt inte skär själv kallas den *enkel*.

Sats 16.2.4 Om $\mathbf{F}$ är glatt rotationsfritt vektotfält (dvs uppfyller (1) om det är ett vektorfält i planet eller (2) om $\mathbf{F}$ är ett vektorplan i rummet) i ett enkelt sammanhängande område D så är $\mathbf{F}$ är konservativt.

Vi har alltså att ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ i planet är konservativt i ett enkelt sammanhängande område D om och endast om

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

i alla punkter $(x, y) \in D$,
ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ i rummet är konservativt i ett enkelt sammanhängande område D om och endast om

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} g(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} g(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z) \end{cases}$$

i alla punkter $(x, y, z) \in D$.